

정답 및 해설

고등 내신 1등급을 위한 기출문제집

100발100중

고등 기출
문제집

공통 수학 | 1하

1학기·기말

내신에 날개를 달아 주는 100발100중!

II 방정식과 부등식

4 여러 가지 부등식

교과서 예제

p.7, 9

- 01 (1) $-1 < x < 1$ (2) $x > 2$ (3) $x \leq 3$ (4) $-2 < x \leq 5$
- 02 (1) $x \leq -1$ (2) $x > -2$ (3) $-\frac{3}{4} \leq x < 4$
- 03 (1) 해는 없다. (2) 해는 없다. (3) $x = 2$ (4) $x = 7$
- 04 (1) $1 \leq x < 3$ (2) $-2 \leq x < 3$ (3) $-2 < x \leq 0$
- 05 (1) $-2 < x < 8$ (2) $x \leq -1$ 또는 $x \geq \frac{1}{3}$
- 06 (1) $x \leq \frac{1}{2}$ (2) $x < 1$ 또는 $x > 3$
- 07 (1) $-3 < x < 0$ 또는 $2 < x < 5$ (2) $-6 \leq x \leq -4$ 또는 $1 \leq x \leq 3$
- 08 (1) $-1 \leq x \leq 2$ (2) $x < -3$ 또는 $x > 4$
- 09 (1) $x < -1$ 또는 $x > 3$ (2) $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ (3) $x \neq 2$ 인 모든 실수
(4) $x = \frac{1}{4}$ (5) 모든 실수 (6) 해는 없다.
- 10 (1) $x \leq -4$ 또는 $x \geq 7$ (2) 모든 실수 (3) $-\frac{1}{3} < x < 3$
(4) 해는 없다. (5) $x = -\frac{2}{3}$ (6) $x \neq -5$ 인 모든 실수
- 11 (1) $x^2 - 2x - 8 < 0$ (2) $x^2 - 7x + 10 \geq 0$
(3) $x^2 - 6x + 9 > 0$ (4) $x^2 - 10x + 25 \leq 0$
- 12 (1) $-2 < k < 6$ (2) $-4 \leq k \leq -1$
(3) $-2 < k < 3$ (4) $-5 \leq k \leq 3$
- 13 (1) $-1 < x \leq 2$ (2) $x < -1$
(3) $-\frac{1}{3} < x < 5$ (4) $-\frac{4}{3} < x \leq \frac{3}{2}$ 또는 $2 \leq x < 4$
- 14 (1) $-5 \leq x < -3$ 또는 $1 < x \leq 3$ (2) $-1 < x \leq \frac{1}{2}$

기출 Best | 1회

p.10~14

- 01 ① 02 ② 03 ③ 04 ⑤ 05 ④
06 ② 07 ② 08 ⑤ 09 ⑤ 10 ③
11 ④ 12 ① 13 ① 14 ④ 15 ②
16 ④ 17 ③ 18 ⑤ 19 ④ 20 ①
21 ③ 22 ③ 23 ⑤ 24 ③ 25 ⑤

기출 Best | 2회

p.15~19

- 01 ⑤ 02 ① 03 ③ 04 ④ 05 ③
06 ① 07 ④ 08 ③ 09 ⑤ 10 ⑤
11 ④ 12 ③ 13 ③ 14 ④ 15 ②

- 16 ② 17 ④ 18 ② 19 ③ 20 ④
21 ④ 22 ③ 23 ① 24 ① 25 ③

변형유형 집중공략

p.20~23

- 1-1 -2 1-2 $-\frac{4}{3} < k \leq -1$ 2-1 ③
2-2 ⑤ 3-1 9 3-2 $k < -3$ 또는 $k > 1$
4-1 ② 4-2 -5

서술형 What & How

p.24~27

- 1 13 2 -1 3 9 4 -4
5 $-3 \leq m < 5$ 6 12 7 $1 < a \leq 2$ 8 $-1 < a \leq 0$

실전 문제 | 1회

p.28~32

- 01 ① 02 ⑤ 03 ④ 04 ① 05 ④
06 ① 07 ② 08 ② 09 ② 10 ⑤
11 ⑤ 12 ③ 13 ④ 14 ④ 15 ④
16 ③ 17 ② 18 ⑤ 19 ⑤ 20 ⑤
21 75 22 ② 23 10
24 $-5 \leq a < -4$ 또는 $6 < a \leq 7$

실전 문제 | 2회

p.33~37

- 01 ① 02 ② 03 ① 04 ④ 05 ③
06 ② 07 ⑤ 08 ③ 09 ① 10 ③
11 ③ 12 ④ 13 ① 14 ④ 15 ①
16 ② 17 ③ 18 ① 19 ④ 20 ②
21 ② 22 ② 23 9
24 $-5 \leq a < -4$ 또는 $a > 2$

수능형 기출문제 & 변형문제

p.38~42

- 1 ① 2 8 3 ① 4 ② 5 ②
6 ⑤ 7 ② 8 ① 9 15 10 15

III 경우의 수

1 순열

교과서 예제

p.45

- 01 8 02 7 03 7 04 13 05 12
 06 8 07 12 08 6
 09 (1) 120 (2) 7 (3) 1 (4) 720
 10 (1) 8 (2) 3 (3) 4 (4) 4 11 (1) 60 (2) 840
 12 (1) 12 (2) 4

기출 Best | 1회

p.46~49

- 01 ⑤ 02 ① 03 ⑤ 04 ② 05 ⑤
 06 ④ 07 ⑤ 08 ② 09 ③ 10 ④
 11 ⑤ 12 ④ 13 ③ 14 ⑤ 15 ⑤
 16 ⑤ 17 ④ 18 ② 19 ⑤ 20 ④

기출 Best | 2회

p.50~53

- 01 ④ 02 ④ 03 ① 04 ② 05 ⑤
 06 ④ 07 ③ 08 ③ 09 ⑤ 10 ④
 11 ① 12 ② 13 ② 14 ① 15 ②
 16 ⑤ 17 ④ 18 ③ 19 ① 20 ②

변형유형 집중공략

p.54~55

- 1-1 ② 1-2 ② 2-1 168 2-2 252

서술형 What & How

p.56~59

- 1 12 2 19 3 1440 4 960
 5 20 6 108 7 83번째 8 570번째

실전 문제 | 1회

p.60~63

- 01 ② 02 ③ 03 ④ 04 ③ 05 ②
 06 ② 07 ② 08 ③ 09 ③ 10 ①
 11 ② 12 ② 13 ⑤ 14 ④ 15 ④
 16 ② 17 ④ 18 ⑤ 19 72
 20 (1) 720 (2) 240 (3) 144

실전 문제 | 2회

p.64~67

- 01 ③ 02 ② 03 ① 04 ② 05 ①
 06 ③ 07 ④ 08 ③ 09 ④ 10 ③
 11 ③ 12 ① 13 ① 14 ② 15 ③
 16 ⑤ 17 ① 18 36 19 657

수능형 기출문제 & 변형문제

p.68~70

- 1 ③ 2 ⑤ 3 ⑤ 4 ④
 5 ③ 6 576

2 조합

교과서 예제

p.73

- 01 (1) 28 (2) 5 (3) 1 (4) 1
 02 (1) 6 (2) 3 (3) 11 (4) 8 (5) 8
 03 120 04 126 05 (1) 495 (2) 420
 06 (1) 10 (2) 5 (3) 4 07 10
 08 (1) 60 (2) 15 (3) 15 09 420

기출 Best | 1회

p.74~77

- 01 ③ 02 ② 03 ② 04 ③ 05 ⑤
 06 ③ 07 ③ 08 ① 09 ④ 10 ④
 11 ② 12 ① 13 ② 14 ③ 15 ①
 16 ① 17 ③ 18 ④ 19 ③ 20 ③

기출 Best | 2회

p.78~81

- | | | | | |
|------|------|------|------|------|
| 01 ④ | 02 ④ | 03 ② | 04 ④ | 05 ④ |
| 06 ② | 07 ① | 08 ② | 09 ⑤ | 10 ③ |
| 11 ④ | 12 ④ | 13 ② | 14 ③ | 15 ③ |
| 16 ④ | 17 ③ | 18 ① | 19 ⑤ | 20 ⑤ |

변형유형 집중공략

p.82~83

- | | | | |
|-------|---------|--------|-------|
| 1-1 ③ | 1-2 181 | 2-1 42 | 2-2 ⑤ |
|-------|---------|--------|-------|

서술형 What & How

p.84~87

- | | | | |
|-----------------|-------|-------|--------|
| 1 96 | 2 9 | 3 840 | 4 144 |
| 5 (1) 23 (2) 52 | 6 200 | 7 150 | 8 2160 |

실전 문제 | 1회

p.88~91

- | | | | | |
|-------|------|-------|-------|------|
| 01 ③ | 02 ③ | 03 ② | 04 ④ | 05 ③ |
| 06 ④ | 07 ⑤ | 08 ⑤ | 09 ① | 10 ⑤ |
| 11 ⑤ | 12 ④ | 13 ② | 14 ④ | 15 ④ |
| 16 90 | 17 ③ | 18 30 | 19 16 | |

실전 문제 | 2회

p.92~95

- | | | | | |
|------|------|------|-------|------|
| 01 ③ | 02 ③ | 03 ④ | 04 ⑤ | 05 ④ |
| 06 ③ | 07 ③ | 08 ② | 09 ① | 10 ① |
| 11 ① | 12 ④ | 13 ④ | 14 ① | 15 ③ |
| 16 ② | 17 ⑤ | 18 7 | 19 60 | |

수능형 기출문제 & 변형문제

p.96~98

- | | | | |
|-------|------|-----|-------|
| 1 16 | 2 ④ | 3 ④ | 4 100 |
| 5 960 | 6 52 | | |

IV 행렬

1 행렬과 그 연산

교과서 예제

p.101

- 01 (1) -1 (2) 5 (3) 8 (4) 7 (5) $a_{11}=4, a_{22}=2$

02 $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

- 03 (1) $a=6, b=4$ (2) $a=1, b=-2$

- 04 $a=2, b=-1, c=1$

05 (1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$
 (4) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & -4 & -9 \end{pmatrix}$

06 (1) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$

07 (1) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 19 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

08 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

09 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

기출 Best | 1회

p.102~105

- | | | | | |
|------|---------|------|------|------|
| 01 ④ | 02 ② | 03 ① | 04 ② | 05 ① |
| 06 ④ | 07 ②, ⑤ | 08 ② | 09 ③ | 10 ② |
| 11 ③ | 12 ④ | 13 ② | 14 ⑤ | 15 ② |
| 16 ③ | 17 ⑤ | 18 ④ | 19 ③ | 20 ② |

기출 Best | 2회

p.106~109

- | | | | | |
|------|------|------|------|------|
| 01 ③ | 02 ① | 03 ⑤ | 04 ④ | 05 ① |
| 06 ③ | 07 ④ | 08 ③ | 09 ② | 10 ④ |
| 11 ① | 12 ① | 13 ② | 14 ② | 15 ⑤ |
| 16 ② | 17 ③ | 18 ⑤ | 19 ② | 20 ③ |

변형유형 집중공략

p.110~111

- | | | | |
|-------|-------|---------|-------|
| 1-1 ② | 1-2 ④ | 2-1 -16 | 2-2 ① |
|-------|-------|---------|-------|

서술형 What & How

p.112~115

- 1 -12 2 94 3 30 4 18
5 23 6 2 7 12 8 5

실전 문제 | 1회

p.116~119

- 01 ① 02 ① 03 ⑤ 04 ⑤ 05 ③
06 ④ 07 ① 08 ⑤ 09 ① 10 ①
11 ① 12 ② 13 ④ 14 ⑤ 15 ③
16 ④ 17 ② 18 42 19 2

실전 문제 | 2회

p.120~123

- 01 ⑤ 02 ⑤ 03 ① 04 ② 05 ④
06 ③ 07 ⑤ 08 ⑤ 09 ③ 10 ⑤
11 ① 12 ③ 13 ② 14 ④ 15 ③
16 ① 17 ④ 18 $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ 19 8

수능형 기출문제 & 변형문제

p.124~128

- 1 ① 2 ④ 3 ④ 4 ②
5 ⑤ 6 ③ 7 18 8 -32
9 3 10 ①

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회

p.130~133

- 01 ② 02 ② 03 ③ 04 ⑤ 05 ⑤
06 ② 07 ④ 08 ③ 09 ④ 10 ①
11 ① 12 ③ 13 ⑤ 14 ⑤ 15 ⑤
16 ⑤ 17 9 18 54 19 936 20 9

실전 모의고사 2회

p.134~137

- 01 ④ 02 ③ 03 ① 04 ② 05 ①
06 ② 07 ④ 08 ⑤ 09 ② 10 ③
11 ⑤ 12 ⑤ 13 ① 14 ① 15 ⑤
16 ② 17 72 18 6 19 96 20 3

실전 모의고사 3회

p.138~141

- 01 ① 02 ① 03 ② 04 ④ 05 ④
06 ④ 07 ② 08 ⑤ 09 ④ 10 ②
11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14 ④ 15 ①
16 ⑤ 17 -14 18 115 19 1 20 70

실전 모의고사 4회

p.142~145

- 01 ③ 02 ② 03 ② 04 ① 05 ④
06 ④ 07 ② 08 ④ 09 ③ 10 ④
11 ⑤ 12 ④ 13 ④ 14 ② 15 ⑤
16 ② 17 3 18 15 19 200
20 $-2 < k < -\frac{1}{2}$ 또는 $k=1$

실전 모의고사 5회

p.146~149

- 01 ③ 02 ⑤ 03 ③ 04 ⑤ 05 ⑤
06 ② 07 ② 08 ⑤ 09 ② 10 ②
11 ④ 12 ⑤ 13 ③ 14 ② 15 ⑤
16 ⑤ 17 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ 18 624 19 4
20 1806

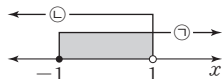
II 방정식과 부등식

4 여러 가지 부등식

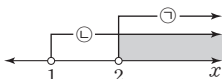
교과서 예제

p.7, 9

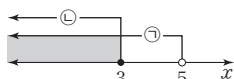
- 01 (1) $3x+2 \geq -1$ 에서 $3x \geq -3 \quad \therefore x \geq -1$ ㉠
 $2x-1 < 1$ 에서 $2x < 2 \quad \therefore x < 1$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $-1 \leq x < 1$



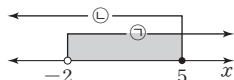
- (2) $5x-2 > 4x$ 에서 $x > 2$ ㉠
 $4-x < 5x-2$ 에서 $-6x < -6 \quad \therefore x > 1$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $x > 2$



- (3) $2x-3 < 7$ 에서 $2x < 10 \quad \therefore x < 5$ ㉠
 $2(x+2) \geq 3x+1$ 에서 $2x+4 \geq 3x+1$
 $-x \geq -3 \quad \therefore x \leq 3$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $x \leq 3$

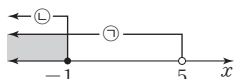


- (4) $4x+8 > 3(x+2)$ 에서 $4x+8 > 3x+6$
 $\therefore x > -2$ ㉠
 $3(x-2) \leq 2x-1$ 에서 $3x-6 \leq 2x-1$
 $\therefore x \leq 5$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $-2 < x \leq 5$

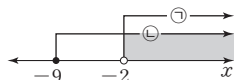


답 (1) $-1 \leq x < 1$ (2) $x > 2$ (3) $x \leq 3$ (4) $-2 < x \leq 5$

- 02 (1) $\frac{x-2}{3} < 1$ 에서 $x-2 < 3 \quad \therefore x < 5$ ㉠
 $x+2 \leq \frac{x+3}{2}$ 에서 $2(x+2) \leq x+3$
 $2x+4 \leq x+3 \quad \therefore x \leq -1$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $x \leq -1$



- (2) $\frac{x+2}{3} < 1 + \frac{x}{2}$ 에서 $2(x+2) < 6+3x$
 $2x+4 < 6+3x, -x < 2 \quad \therefore x > -2$ ㉠
 $0.1x-0.4 \leq 0.2x+0.5$ 에서 $x-4 \leq 2x+5$
 $-x \leq 9 \quad \therefore x \geq -9$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $x > -2$



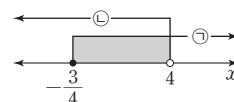
- (3) $\frac{2x+5}{4} + 1 \geq -\frac{x-3}{2}$ 에서 $2x+5+4 \geq -2(x-3)$
 $2x+9 \geq -2x+6, 4x \geq -3 \quad \therefore x \geq -\frac{3}{4}$ ㉠

$$0.1x < -0.2(x-6) \text{에서 } x < -2(x-6)$$

$$x < -2x+12, 3x < 12 \quad \therefore x < 4$$
 ㉡

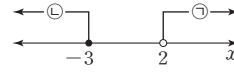
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-\frac{3}{4} \leq x < 4$$

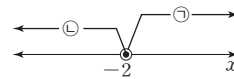


답 (1) $x \leq -1$ (2) $x > -2$ (3) $-\frac{3}{4} \leq x < 4$

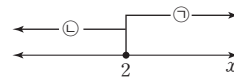
- 03 (1) $3x-2 > 4$ 에서 $3x > 6 \quad \therefore x > 2$ ㉠
 $2x-1 \geq 4x+5$ 에서 $-2x \geq 6 \quad \therefore x \leq -3$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로
 해는 없다.



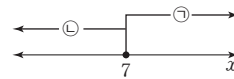
- (2) $x+1 < 2x+3$ 에서 $-x < 2 \quad \therefore x > -2$ ㉠
 $6(x+1) \leq x-4$ 에서 $6x+6 \leq x-4$
 $5x \leq -10 \quad \therefore x \leq -2$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로
 해는 없다.



- (3) $-x+3 \leq 4x-7$ 에서 $-5x \leq -10$
 $\therefore x \geq 2$ ㉠
 $2x-3 \leq 3-x$ 에서 $3x \leq 6 \quad \therefore x \leq 2$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $x=2$

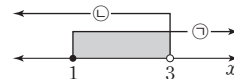


- (4) $x+3 \leq 2(x-2)$ 에서 $x+3 \leq 2x-4$
 $-x \leq -7 \quad \therefore x \geq 7$ ㉠
 $\frac{x}{3} + 1 \geq \frac{5}{6}x - \frac{5}{2}$ 에서 $2x+6 \geq 5x-15$
 $-3x \geq -21 \quad \therefore x \leq 7$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $x=7$

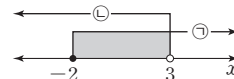


답 (1) 해는 없다. (2) 해는 없다. (3) $x=2$ (4) $x=7$

- 04 (1) $-4 \leq x-5 < -x+1$ 에서 $\begin{cases} -4 \leq x-5 \\ x-5 < -x+1 \end{cases}$
 $-4 \leq x-5$ 에서 $x \geq 1$ ㉠
 $x-5 < -x+1$ 에서 $2x < 6 \quad \therefore x < 3$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $1 \leq x < 3$



- (2) $2x-1 \leq 3x+1 < x+7$ 에서 $\begin{cases} 2x-1 \leq 3x+1 \\ 3x+1 < x+7 \end{cases}$
 $2x-1 \leq 3x+1$ 에서 $-x \leq 2 \quad \therefore x \geq -2$ ㉠
 $3x+1 < x+7$ 에서 $2x < 6 \quad \therefore x < 3$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $-2 \leq x < 3$



- (3) $3+2(x-6) \leq -x-9 < 2x-3$ 에서
 $\begin{cases} 3+2(x-6) \leq -x-9 \\ -x-9 < 2x-3 \end{cases}$
 $3+2(x-6) \leq -x-9$ 에서 $3+2x-12 \leq -x-9$

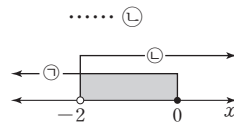
$$2x-9 \leq -x-9, 3x \leq 0 \quad \therefore x \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$-x-9 < 2x-3 \text{에서 } -3x < 6$$

$$\therefore x > -2$$

⑦, ⑧의 공통부분을 구하면

$$-2 < x \leq 0$$



답 (1) $1 \leq x < 3$ (2) $-2 \leq x < 3$ (3) $-2 < x \leq 0$

05 (1) $|x-3| < 5$ 에서 $-5 < x-3 < 5$

$$\therefore -2 < x < 8$$

(2) $|3x+1| \geq 2$ 에서 $3x+1 \leq -2$ 또는 $3x+1 \geq 2$

$$3x \leq -3 \text{ 또는 } 3x \geq 1$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq \frac{1}{3}$$

답 (1) $-2 < x < 8$ (2) $x \leq -1$ 또는 $x \geq \frac{1}{3}$

06 (1) $|2x+3| \leq -6x+7$ 에서

(i) $x < -\frac{3}{2}$ 일 때

$$-(2x+3) \leq -6x+7, -2x-3 \leq -6x+7$$

$$4x \leq 10 \quad \therefore x \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{그런데 } x < -\frac{3}{2} \text{이므로 } x < -\frac{3}{2}$$

(ii) $x \geq -\frac{3}{2}$ 일 때

$$2x+3 \leq -6x+7, 8x \leq 4 \quad \therefore x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{그런데 } x \geq -\frac{3}{2} \text{이므로 } -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 부등식의 해는

$$x \leq \frac{1}{2}$$

(2) $|-3x+5| > x+1$ 에서

(i) $x < \frac{5}{3}$ 일 때

$$-3x+5 > x+1, -4x > -4$$

$$\therefore x < 1$$

$$\text{그런데 } x < \frac{5}{3} \text{이므로 } x < 1$$

(ii) $x \geq \frac{5}{3}$ 일 때

$$-(-3x+5) > x+1, 3x-5 > x+1$$

$$2x > 6 \quad \therefore x > 3$$

$$\text{그런데 } x \geq \frac{5}{3} \text{이므로 } x > 3$$

(i), (ii)에서 부등식의 해는

$$x < 1 \text{ 또는 } x > 3$$

답 (1) $x \leq \frac{1}{2}$ (2) $x < 1$ 또는 $x > 3$

07 (1) $1 < |x-1| < 4$ 에서

$$-4 < x-1 < -1 \text{ 또는 } 1 < x-1 < 4$$

$$\therefore -3 < x < 0 \text{ 또는 } 2 < x < 5$$

(2) $5 \leq |2x+3| \leq 9$ 에서

$$-9 \leq 2x+3 \leq -5 \text{ 또는 } 5 \leq 2x+3 \leq 9$$

$$-12 \leq 2x \leq -8 \text{ 또는 } 2 \leq 2x \leq 6$$

$$\therefore -6 \leq x \leq -4 \text{ 또는 } 1 \leq x \leq 3$$

답 (1) $-3 < x < 0$ 또는 $2 < x < 5$

(2) $-6 \leq x \leq -4$ 또는 $1 \leq x \leq 3$

08 (1) $|x| + |x-1| \leq 3$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때

$$-x-(x-1) \leq 3, -2x+1 \leq 3$$

$$-2x \leq 2 \quad \therefore x \geq -1$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $-1 \leq x < 0$

(ii) $0 \leq x < 1$ 일 때

$$x-(x-1) \leq 3 \quad \therefore 1 \leq 3$$

즉, 부등식은 주어진 범위에서 항상 성립하므로

$$0 \leq x < 1$$

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$$x+(x-1) \leq 3, 2x-1 \leq 3$$

$$2x \leq 4 \quad \therefore x \leq 2$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$

(i), (ii), (iii)에서 부등식의 해는

$$-1 \leq x \leq 2$$

(2) $|x+2| + |x-3| > 7$ 에서

(i) $x < -2$ 일 때

$$-(x+2)-(x-3) > 7, -2x+1 > 7$$

$$-2x > 6 \quad \therefore x < -3$$

그런데 $x < -2$ 이므로 $x < -3$

(ii) $-2 \leq x < 3$ 일 때

$$(x+2)-(x-3) > 7 \quad \therefore 5 > 7$$

즉, $-2 \leq x < 3$ 에서 부등식은 성립하지 않는다.

(iii) $x \geq 3$ 일 때

$$(x+2)+(x-3) > 7, 2x-1 > 7$$

$$2x > 8 \quad \therefore x > 4$$

그런데 $x \geq 3$ 이므로 $x > 4$

(i), (ii), (iii)에서 부등식의 해는

$$x < -3 \text{ 또는 } x > 4$$

답 (1) $-1 \leq x \leq 2$ (2) $x < -3$ 또는 $x > 4$

09 (1) $x^2-2x-3 > 0$ 에서 $(x+1)(x-3) > 0$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 3$$

(2) $2x^2-5x+2 \leq 0$ 에서 $(2x-1)(x-2) \leq 0$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

(3) $x^2 - 4x + 4 > 0$ 에서 $(x-2)^2 > 0$

$\therefore x \neq 2$ 인 모든 실수

(4) $16x^2 - 8x + 1 \leq 0$ 에서 $(4x-1)^2 \leq 0$

$\therefore x = \frac{1}{4}$

(5) $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$

따라서 부등식 $x^2 - x + 2 > 0$ 의 해는 모든 실수이다.

(6) $5x^2 - 10x + 6 = 5(x-1)^2 + 1 \geq 1$

따라서 부등식 $5x^2 - 10x + 6 \leq 0$ 의 해는 없다.

답 (1) $x < -1$ 또는 $x > 3$ (2) $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

(3) $x \neq 2$ 인 모든 실수 (4) $x = \frac{1}{4}$

(5) 모든 실수 (6) 해는 없다.

다른풀이 (5) 이차방정식 $x^2 - x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$

따라서 부등식 $x^2 - x + 2 > 0$ 의 해는 모든 실수이다.

(6) 이차방정식 $5x^2 - 10x + 6 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (-5)^2 - 5 \times 6 = -5 < 0$

따라서 부등식 $5x^2 - 10x + 6 \leq 0$ 의 해는 없다.

10 (1) $-x^2 + 3x + 28 \leq 0$ 에서 $x^2 - 3x - 28 \geq 0$

$(x+4)(x-7) \geq 0 \quad \therefore x \leq -4$ 또는 $x \geq 7$

(2) $4x^2 + 1 \geq 4x$ 에서 $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$

$(2x-1)^2 \geq 0$

따라서 부등식 $4x^2 + 1 \geq 4x$ 의 해는 모든 실수이다.

(3) $3x^2 < 8x + 3$ 에서 $3x^2 - 8x - 3 < 0$

$(3x+1)(x-3) < 0 \quad \therefore -\frac{1}{3} < x < 3$

(4) $-x^2 - 8x - 16 > 0$ 에서 $x^2 + 8x + 16 < 0$

$(x+4)^2 < 0$

따라서 부등식 $-x^2 - 8x - 16 > 0$ 의 해는 없다.

(5) $-9x^2 \geq 12x + 4$ 에서 $9x^2 + 12x + 4 \leq 0$

$(3x+2)^2 \leq 0 \quad \therefore x = -\frac{2}{3}$

(6) $-x^2 - 10x - 25 < 0$ 에서 $x^2 + 10x + 25 > 0$

$(x+5)^2 > 0 \quad \therefore x \neq -5$ 인 모든 실수

답 (1) $x \leq -4$ 또는 $x \geq 7$ (2) 모든 실수

(3) $-\frac{1}{3} < x < 3$ (4) 해는 없다. (5) $x = -\frac{2}{3}$

(6) $x \neq -5$ 인 모든 실수

11 (1) 해가 $-2 < x < 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-4) < 0 \quad \therefore x^2 - 2x - 8 < 0$

(2) 해가 $x \leq 2$ 또는 $x \geq 5$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-2)(x-5) \geq 0 \quad \therefore x^2 - 7x + 10 \geq 0$

(3) 해가 $x \neq 3$ 인 모든 실수이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-3)^2 > 0 \quad \therefore x^2 - 6x + 9 > 0$

(4) 해가 $x=5$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-5)^2 \leq 0 \quad \therefore x^2 - 10x + 25 \leq 0$

답 (1) $x^2 - 2x - 8 < 0$ (2) $x^2 - 7x + 10 \geq 0$

(3) $x^2 - 6x + 9 > 0$ (4) $x^2 - 10x + 25 \leq 0$

12 (1) 이차방정식 $x^2 - kx + k + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = (-k)^2 - 4 \times 1 \times (k+3) < 0$

$k^2 - 4k - 12 < 0, (k+2)(k-6) < 0$

$\therefore -2 < k < 6$

(2) 이차방정식 $x^2 + 2(k+3)x + k+5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (k+3)^2 - 1 \times (k+5) \leq 0, k^2 + 6k + 9 - k - 5 \leq 0$

$k^2 + 5k + 4 \leq 0, (k+4)(k+1) \leq 0$

$\therefore -4 \leq k \leq -1$

(3) 이차방정식 $-x^2 + 2kx - k - 6 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = k^2 - (-1) \times (-k-6) < 0$

$k^2 - k - 6 < 0, (k+2)(k-3) < 0$

$\therefore -2 < k < 3$

(4) 이차방정식 $-x^2 + 2kx + 2k - 15 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = k^2 - (-1) \times (2k-15) \leq 0$

$k^2 + 2k - 15 \leq 0, (k+5)(k-3) \leq 0$

$\therefore -5 \leq k \leq 3$

답 (1) $-2 < k < 6$ (2) $-4 \leq k \leq -1$

(3) $-2 < k < 3$ (4) $-5 \leq k \leq 3$

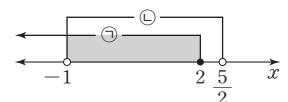
13 (1) $2x-1 \leq x+1$ 에서 $x \leq 2$ ㉠

$2x^2 - 3x - 5 < 0$ 에서 $(x+1)(2x-5) < 0$

$\therefore -1 < x < \frac{5}{2}$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1 < x \leq 2$



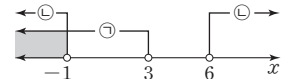
(2) $3x-2 < x+4$ 에서 $2x < 6 \quad \therefore x < 3$ ㉢

$x^2 - 5x - 6 > 0$ 에서 $(x+1)(x-6) > 0$

$\therefore x < -1$ 또는 $x > 6$ ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면

$x < -1$



(3) $x^2 - 5x - 24 \leq 0$ 에서 $(x+3)(x-8) \leq 0$

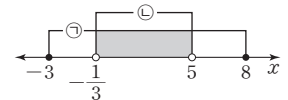
$\therefore -3 \leq x \leq 8$ ㉤

$3x^2 - 14x - 5 < 0$ 에서 $(3x+1)(x-5) < 0$

$\therefore -\frac{1}{3} < x < 5$ ㉥

㉤, ㉥의 공통부분을 구하면

$-\frac{1}{3} < x < 5$



(4) $2x^2 - 7x + 6 \geq 0$ 에서 $(2x-3)(x-2) \geq 0$

$\therefore x \leq \frac{3}{2}$ 또는 $x \geq 2$ ㉦

$$3x^2 - 8x - 16 < 0 \text{에서 } (3x+4)(x-4) < 0$$

$$\therefore -\frac{4}{3} < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉑, ㉒의 공통부분을 구하면

$$-\frac{4}{3} < x \leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } 2 \leq x < 4$$

$$\text{답 (1) } -1 < x \leq 2 \quad (2) x < -1$$

$$(3) -\frac{1}{3} < x < 5 \quad (4) -\frac{4}{3} < x \leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } 2 \leq x < 4$$

$$14 \quad (1) -5 < x^2 + 2x - 8 \leq 7 \text{에서 } \begin{cases} -5 < x^2 + 2x - 8 \\ x^2 + 2x - 8 \leq 7 \end{cases}$$

$$-5 < x^2 + 2x - 8 \text{에서 } x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$(x+3)(x-1) > 0 \quad \therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$x^2 + 2x - 8 \leq 7 \text{에서 } x^2 + 2x - 15 \leq 0$$

$$(x+5)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -5 \leq x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉑, ㉒의 공통부분을 구하면

$$-5 \leq x < -3 \text{ 또는 } 1 < x \leq 3$$

$$(2) 5x \leq 2x^2 + 2 < 2x + 6 \text{에서 } \begin{cases} 5x \leq 2x^2 + 2 \\ 2x^2 + 2 < 2x + 6 \end{cases}$$

$$5x \leq 2x^2 + 2 \text{에서 } 2x^2 - 5x + 2 \geq 0$$

$$(2x-1)(x-2) \geq 0 \quad \therefore x \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$2x^2 + 2 < 2x + 6 \text{에서 } 2x^2 - 2x - 4 < 0$$

$$x^2 - x - 2 < 0, (x+1)(x-2) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉑, ㉒의 공통부분을 구하면

$$-1 < x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{답 (1) } -5 \leq x < -3 \text{ 또는 } 1 < x \leq 3 \quad (2) -1 < x \leq \frac{1}{2}$$

기출 Best | 1회

p.10~14

$$01 \quad x-3 < 2x+1 \text{에서 } -x < 4 \quad \therefore x > -4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$-3x+4 > 2x-1 \text{에서 } -5x > -5 \quad \therefore x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉑, ㉒의 공통부분을 구하면

$$-4 < x < 1$$

따라서 $a = -4, b = 1$ 이므로

$$a+b = -4+1 = -3 \quad \text{답 ①}$$

$$02 \quad 5x-4 \leq 2x+5 \leq 4x+3 \text{에서 } \begin{cases} 5x-4 \leq 2x+5 \\ 2x+5 \leq 4x+3 \end{cases}$$

$$5x-4 \leq 2x+5 \text{에서 } 3x \leq 9 \quad \therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$2x+5 \leq 4x+3 \text{에서 } -2x \leq -2 \quad \therefore x \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉑, ㉒의 공통부분을 구하면

$$1 \leq x \leq 3$$

답 ②

$$03 \quad 3x-9 \leq 12 \text{에서 } 3x \leq 21 \quad \therefore x \leq 7$$

$$7x-a > -8 \text{에서 } 7x > a-8 \quad \therefore x > \frac{a-8}{7}$$

주어진 연립부등식의 해가 $-2 < x \leq b$ 이므로

$$\frac{a-8}{7} = -2, b = 7$$

$$\frac{a-8}{7} = -2 \text{에서 } a-8 = -14 \quad \therefore a = -6$$

$$\therefore a+b = -6+7 = 1$$

답 ③

$$04 \quad 2(x+a) < -4x+1 \text{에서 } 2x+2a < -4x+1$$

$$6x < -2a+1 \quad \therefore x < \frac{-2a+1}{6} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$2x+a > 2 \text{에서 } 2x > -a+2 \quad \therefore x > \frac{-a+2}{2} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려

면 ㉑, ㉒의 공통부분이 없어야 하므로

오른쪽 그림에서

$$\frac{-2a+1}{6} \leq \frac{-a+2}{2}, -2a+1 \leq 3(-a+2)$$

$$-2a+1 \leq -3a+6 \quad \therefore a \leq 5$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 5이다.

답 ⑤

$$05 \quad 5x-6 > 3x-4 \text{에서 } 2x > 2 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$2x+3 \leq a \text{에서 } 2x \leq a-3 \quad \therefore x \leq \frac{a-3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정

수 x 가 2개이므로 오른쪽 그림에서

$$3 \leq \frac{a-3}{2} < 4, 6 \leq a-3 < 8$$

$$\therefore 9 \leq a < 11$$

답 ④

$$06 \quad \text{학생 수를 } x \text{라 하면 연필은 } (4x+16) \text{자루이므로}$$

$$7(x-1)+1 \leq 4x+16 \leq 7(x-1)+4$$

$$\text{즉, } \begin{cases} 7(x-1)+1 \leq 4x+16 \\ 4x+16 \leq 7(x-1)+4 \end{cases}$$

$$7(x-1)+1 \leq 4x+16 \text{에서 } 7x-6 \leq 4x+16$$

$$3x \leq 22 \quad \therefore x \leq \frac{22}{3} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$4x+16 \leq 7(x-1)+4 \text{에서 } 4x+16 \leq 7x-3$$

$$-3x \leq -19 \quad \therefore x \geq \frac{19}{3} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉑, ㉒의 공통부분을 구하면

$$\frac{19}{3} \leq x \leq \frac{22}{3}$$

이때 x 는 자연수이므로 $x = 7$

따라서 학생은 7명이므로 연필은 $4 \times 7 + 16 = 44$ (자루)이다.

답 ②

$$07 \quad 2|x-3| < 2x+5 \text{에서}$$

(i) $x < 3$ 일 때

$$-2(x-3) < 2x+5, -2x+6 < 2x+5$$

$$-4x < -1 \quad \therefore x > \frac{1}{4}$$

$$\text{그런데 } x < 3 \text{이므로 } \frac{1}{4} < x < 3$$

(ii) $x \geq 3$ 일 때

$$2(x-3) < 2x+5, 2x-6 < 2x+5 \quad \therefore -6 < 5$$

즉, 부등식은 주어진 범위에서 항상 성립하므로

$$x \geq 3$$

(i), (ii)에서 부등식의 해는 $x > \frac{1}{4}$

따라서 정수 x 의 최솟값은 1이다.

답 ②

08 $|x+2| + |x-4| \leq 8$ 에서

(i) $x < -2$ 일 때

$$-(x+2) - (x-4) \leq 8, -2x+2 \leq 8$$

$$-2x \leq 6 \quad \therefore x \geq -3$$

$$\text{그런데 } x < -2 \text{이므로 } -3 \leq x < -2$$

(ii) $-2 \leq x < 4$ 일 때

$$(x+2) - (x-4) \leq 8 \quad \therefore 6 \leq 8$$

즉, 부등식은 주어진 범위에서 항상 성립하므로

$$-2 \leq x < 4$$

(iii) $x \geq 4$ 일 때

$$(x+2) + (x-4) \leq 8, 2x-2 \leq 8$$

$$2x \leq 10 \quad \therefore x \leq 5$$

$$\text{그런데 } x \geq 4 \text{이므로 } 4 \leq x \leq 5$$

(i), (ii), (iii)에서 부등식의 해는 $-3 \leq x \leq 5$

따라서 $a = -3$, $b = 5$ 이므로

$$b-a = 5 - (-3) = 8$$

답 ⑤

09 ① $2x-1 \leq x^2$ 에서 $x^2-2x+1 \geq 0$

이때 $x^2-2x+1 = (x-1)^2 \geq 0$ 이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

② $x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ 이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

③ $4x^2 > 2x-1$ 에서 $4x^2-2x+1 > 0$

이때 $4x^2-2x+1 = 4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ 이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

④ $x^2-6x+10 = (x-3)^2 + 1 \geq 1$ 이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

⑤ $2x^2-3x+5 = 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{8} \geq \frac{31}{8}$ 이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

따라서 해가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

답 ⑤

10 해가 $x < -1$ 또는 $x > 5$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-5) > 0 \quad \therefore x^2-4x-5 > 0$$

이 부등식이 $x^2+ax+b > 0$ 과 일치하므로

$$a = -4, b = -5$$

이를 부등식 $x^2+bx+6a < 0$ 에 대입하면

$$x^2-5x-24 < 0, (x+3)(x-8) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 8$$

답 ③

11 이차부등식 $f(x) < 0$ 의 해가 $-2 < x < 4$ 이므로

$f(x) = a(x+2)(x-4)$ ($a > 0$)로 놓으면

$$f(-2x+1) = a(-2x+1+2)(-2x+1-4)$$

$$= a(-2x+3)(-2x-3)$$

$$= a(2x-3)(2x+3)$$

부등식 $f(-2x+1) > 0$, 즉 $a(2x-3)(2x+3) > 0$ ($a > 0$)에서

$$(2x+3)(2x-3) > 0$$

$$\therefore x < -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x > \frac{3}{2}$$

답 ④

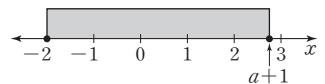
12 $x^2 - (a-1)x - 2(a+1) \leq 0$ 에서

$$(x+2)\{x-(a+1)\} \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq a+1 \quad (\because a > 0)$$

이를 만족시키는 정수 x 가 5

개이므로 오른쪽 그림에서



$$2 \leq a+1 < 3 \quad \therefore 1 \leq a < 2$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 1이다.

답 ①

13 모든 실수 x 에 대하여 $x^2-2kx-2k^2+k+4 > 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-2kx-2k^2+k+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 1 \times (-2k^2+k+4) < 0$$

$$k^2+2k^2-k-4 < 0, 3k^2-k-4 < 0$$

$$(k+1)(3k-4) < 0 \quad \therefore -1 < k < \frac{4}{3}$$

따라서 정수 k 는 0, 1이므로 모든 정수 k 의 값의 합은

$$0+1=1$$

답 ①

14 이차부등식 $x^2-2ax+9a < 0$ 의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2-2ax+9a \geq 0$ 이 성립해야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2-2ax+9a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 1 \times 9a \leq 0$$

$$a^2-9a \leq 0, a(a-9) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 9$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, ..., 9의 10개이다.

답 ④

15 이차함수 $y=x^2-3x+5$ 의 그래프가 직선 $y=kx-4$ 보다 항상 위쪽에 있으면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2-3x+5 > kx-4$, 즉 $x^2-(k+3)x+9 > 0$ 이 성립해야 한다. 즉, 이차방정식

$x^2-(k+3)x+9=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(k+3)\}^2 - 4 \times 1 \times 9 < 0, k^2+6k+9-36 < 0$$

$$k^2+6k-27 < 0, (k+9)(k-3) < 0$$

$$\therefore -9 < k < 3$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 2, 최솟값은 -8이므로 구하는 합은

$$2 + (-8) = -6$$

답 ②

16 $x^2-3x-4 \geq 0$ 에서 $(x+1)(x-4) \geq 0$

$\therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq 4$ ㉠

$2x^2-13x+11 < 0$ 에서 $(x-1)(2x-11) < 0$

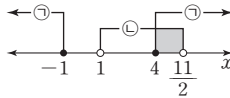
$\therefore 1 < x < \frac{11}{2}$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$4 \leq x < \frac{11}{2}$

따라서 $\alpha=4, \beta=\frac{11}{2}$ 이므로

$\alpha\beta=4 \times \frac{11}{2}=22$



답 ④

17 $x^2-5x+4 \leq 0$ 에서 $(x-1)(x-4) \leq 0$

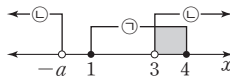
$\therefore 1 \leq x \leq 4$ ㉠

$x^2+(a-3)x-3a > 0$ 에서 $(x+a)(x-3) > 0$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $3 < x \leq 4$ 가 되

어야 하므로 오른쪽 그림에서

$-a \leq 1 \quad \therefore a \geq -1$



답 ③

18 $x^2+6x+5 < 0$ 에서 $(x+5)(x+1) < 0$

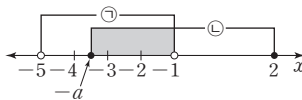
$\therefore -5 < x < -1$ ㉠

$x^2+(a-2)x-2a \leq 0$ 에서 $(x+a)(x-2) \leq 0$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는

정수 x 가 2개이므로 오른쪽

그림에서 $-4 < -a \leq -3 \quad \therefore 3 \leq a < 4$



답 ⑤

19 텃밭의 가로 길이가 x m, 울타리의 총 길이가 30 m이므로 세로의 길이는 $(30-2x)$ m

텃밭의 가로 길이는 세로의 길이보다 짧으므로

$x < 30-2x, 3x < 30$

$\therefore x < 10$ ㉠

텃밭의 넓이가 72 m^2 이상이므로

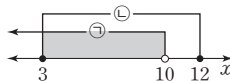
$x(30-2x) \geq 72, -2x^2+30x \geq 72$

$2x^2-30x+72 \leq 0, x^2-15x+36 \leq 0$

$(x-3)(x-12) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq x \leq 12$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$3 \leq x < 10$



답 ④

20 이차방정식 $x^2-(2k+9)x-6k=0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D_1 이라 하면

$D_1 = \{-(2k+9)\}^2 - 4 \times 1 \times (-6k) \geq 0$

$4k^2+36k+81+24k \geq 0, 4k^2+60k+81 \geq 0$

$(2k+27)(2k+3) \geq 0$

$\therefore k \leq -\frac{27}{2}$ 또는 $k \geq -\frac{3}{2}$ ㉠

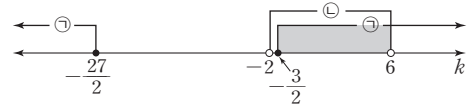
이차방정식 $x^2+kx+k+3=0$ 이 허근을 가지므로 판별식을 D_2 라 하면

$D_2 = k^2 - 4 \times 1 \times (k+3) < 0$

$k^2-4k-12 < 0, (k+2)(k-6) < 0$

$\therefore -2 < k < 6$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-\frac{3}{2} \leq k < 6$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, \dots, 5$ 의 7개이다.

답 ①

21 $P(x) = x^3 + (k-2)x^2 + (k+1)x + 4$ 라 하면

$P(-1) = -1 + k - 2 - k - 1 + 4 = 0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & k-2 & k+1 & 4 \\ & & -1 & -k+3 & -4 \\ \hline & 1 & k-3 & 4 & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x) = (x+1)\{x^2 + (k-3)x + 4\}$

$P(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x^2 + (k-3)x + 4=0$

삼차방정식 $P(x)=0$ 이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지므로 이차방정식 $x^2 + (k-3)x + 4=0$ 은 두 개의 허근을 가져야 한다. 즉, 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$D = (k-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 < 0$

$k^2-6k+9-16 < 0, k^2-6k-7 < 0$

$(k+1)(k-7) < 0 \quad \therefore -1 < k < 7$

따라서 정수 k 의 최댓값은 6이다.

답 ③

22 이차방정식 $x^2 + (a^2-4a+3)x - a + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta = -a + 2 < 0$

$\therefore a > 2$ ㉠

또, 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

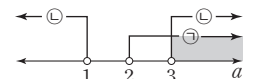
$\alpha + \beta = -(a^2-4a+3) < 0$

$a^2-4a+3 > 0, (a-1)(a-3) > 0$

$\therefore a < 1$ 또는 $a > 3$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a > 3$

따라서 정수 a 의 최솟값은 4이다.



답 ③

23 $f(x) = 2x^2 - 4x + k$ 라 하면 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 축은 직선 $x=1$ 이

므로 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 실근이

모두 -1 과 2 사이에 있으려면 $y=f(x)$

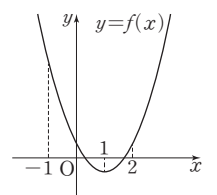
의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 2 \times k \geq 0, 4-2k \geq 0$

$-2k \geq -4 \quad \therefore k \leq 2$

..... ㉠



(ii) $f(-1) > 0$ 이므로

$$f(-1) = 2 + 4 + k > 0 \quad \therefore k > -6 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

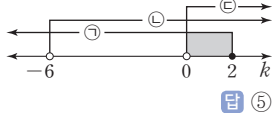
(iii) $f(2) > 0$ 이므로

$$f(2) = 8 - 8 + k > 0 \quad \therefore k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

(i), (ii), (iii)에서 $\textcircled{L}$, $\textcircled{L}$, $\textcircled{E}$ 의 공

통부분을 구하면

$$0 < k \leq 2$$



답 ⑤

24 $x^4 - kx^2 - k + 8 = 0$ 에서 $x^2 = t$ 로 놓으면

$$t^2 - kt - k + 8 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = (-k)^2 - 4 \times 1 \times (-k + 8) > 0$$

$$k^2 + 4k - 32 > 0, (k + 8)(k - 4) > 0$$

$$\therefore k < -8 \text{ 또는 } k > 4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

(ii) $\textcircled{1}$ 의 두 실근의 합이 0보다 크므로

$$k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

(iii) $\textcircled{1}$ 의 두 실근의 곱이 0보다 크므로

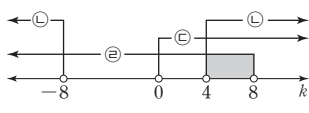
$$-k + 8 > 0 \quad \therefore k < 8 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

(i), (ii), (iii)에서 $\textcircled{L}$, $\textcircled{E}$, $\textcircled{L}$ 의

공통부분을 구하면

$$4 < k < 8$$

따라서 정수 k 는 5, 6, 7의 3개이다.



답 ③

25 $|2x - 1| > 3$ 에서

$$2x - 1 < -3 \text{ 또는 } 2x - 1 > 3$$

$$2x < -2 \text{ 또는 } 2x > 4$$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2x^2 - 5x - 18 \leq 0 \text{에서 } (x + 2)(2x - 9) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

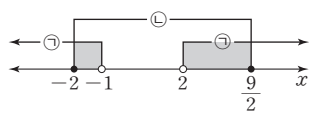
$\textcircled{1}$, $\textcircled{L}$ 의 공통부분을 구하면

$$-2 \leq x < -1 \text{ 또는}$$

$$2 < x \leq \frac{9}{2}$$

따라서 정수 x 는 -2, 3, 4이므로 모든 정수 x 의 값의 합은

$$-2 + 3 + 4 = 5$$



답 ⑤

$\textcircled{1}$, $\textcircled{L}$ 의 공통부분을 구하면

$$2 \leq x < 9$$

따라서 $a = 2$, $b = 9$ 이므로

$$a + b = 2 + 9 = 11$$



답 ⑤

02 $-4x + 6 \leq 3x - 8 < x + 4$ 에서

$$\begin{cases} -4x + 6 \leq 3x - 8 \\ 3x - 8 < x + 4 \end{cases}$$

$$-4x + 6 \leq 3x - 8 \text{에서 } -7x \leq -14$$

$$\therefore x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$3x - 8 < x + 4 \text{에서 } 2x < 12$$

$$\therefore x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

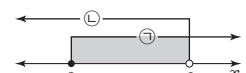
$\textcircled{1}$, $\textcircled{L}$ 의 공통부분을 구하면

$$2 \leq x < 6$$

따라서 정수 x 의 최댓값은 5, 최솟값은 2이므로

$$M = 5, m = 2$$

$$\therefore M - m = 5 - 2 = 3$$



답 ①

03 $2x - 4 < 6x + 12$ 에서 $-4x < 16$

$$\therefore x > -4$$

$$x - 11 \leq a - 3x \text{에서 } 4x \leq a + 11$$

$$\therefore x \leq \frac{a + 11}{4}$$

주어진 연립부등식의 해가 $b < x \leq 4$ 이므로

$$-4 = b, \frac{a + 11}{4} = 4$$

$$\frac{a + 11}{4} = 4 \text{에서 } a + 11 = 16 \quad \therefore a = 5$$

$$\therefore ab = 5 \times (-4) = -20$$

답 ③

04 $\frac{4}{3}x + 3 < -\frac{2}{3}x + a$ 에서 $4x + 9 < -2x + 3a$

$$6x < 3a - 9 \quad \therefore x < \frac{a - 3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}a \geq a + 4 \text{에서 } x + 6a \geq 4a + 16$$

$$\therefore x \geq -2a + 16 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면

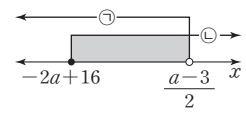
$\textcircled{1}$, $\textcircled{L}$ 의 공통부분이 존재해야 하므로

오른쪽 그림에서

$$-2a + 16 < \frac{a - 3}{2}, -4a + 32 < a - 3$$

$$-5a < -35 \quad \therefore a > 7$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 8이다.



답 ④

01 $3x - 5 < x + 13$ 에서 $2x < 18$

$$\therefore x < 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x + 5 \leq 5x - 3 \text{에서 } -4x \leq -8$$

$$\therefore x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

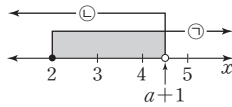
05 $5 - x \leq 2x - 1 < x + a$ 에서 $\begin{cases} 5 - x \leq 2x - 1 \\ 2x - 1 < x + a \end{cases}$

$$5 - x \leq 2x - 1 \text{에서 } -3x \leq -6$$

$$\therefore x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2x - 1 < x + a \text{에서 } x < a + 1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 3개이므로 오른쪽 그림에서 $4 < a+1 \leq 5 \quad \therefore 3 < a \leq 4$



답 ③

06 의자의 개수를 x 라 하면 학생은 $(5x+2)$ 명이므로

$$7(x-3)+1 \leq 5x+2 \leq 7(x-3)+7$$

$$\text{즉, } \begin{cases} 7(x-3)+1 \leq 5x+2 \\ 5x+2 \leq 7(x-3)+7 \end{cases}$$

$$7(x-3)+1 \leq 5x+2 \text{에서 } 7x-20 \leq 5x+2$$

$$2x \leq 22 \quad \therefore x \leq 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$5x+2 \leq 7(x-3)+7 \text{에서 } 5x+2 \leq 7x-14$$

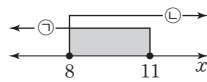
$$-2x \leq -16 \quad \therefore x \geq 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{L}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{L}$ 의 공통부분을 구하면

$$8 \leq x \leq 11$$

따라서 의자의 개수가 될 수 없는 것은

① 7이다.



답 ①

07 $x+1-|2x-1| \geq 0$ 에서

(i) $x < \frac{1}{2}$ 일 때

$$x+1+(2x-1) \geq 0$$

$$3x \geq 0 \quad \therefore x \geq 0$$

$$\text{그런데 } x < \frac{1}{2} \text{이므로 } 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

(ii) $x \geq \frac{1}{2}$ 일 때

$$x+1-(2x-1) \geq 0, x+1-2x+1 \geq 0$$

$$-x+2 \geq 0, -x \geq -2$$

$$\therefore x \leq 2$$

$$\text{그런데 } x \geq \frac{1}{2} \text{이므로 } \frac{1}{2} \leq x \leq 2$$

(i), (ii)에서 부등식의 해는

$$0 \leq x \leq 2$$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2이므로 모든 정수 x 의 값의 합은

$$0+1+2=3$$

답 ④

08 $\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ 이므로

$$|x-1| + |x-3| < 4$$

(i) $x < 1$ 일 때

$$-(x-1)-(x-3) < 4, -2x+4 < 4$$

$$-2x < 0 \quad \therefore x > 0$$

$$\text{그런데 } x < 1 \text{이므로 } 0 < x < 1$$

(ii) $1 \leq x < 3$ 일 때

$$(x-1)-(x-3) < 4 \quad \therefore 2 < 4$$

즉, 부등식은 주어진 범위에서 항상 성립하므로

$$1 \leq x < 3$$

(iii) $x \geq 3$ 일 때

$$(x-1)+(x-3) < 4, 2x-4 < 4$$

$$2x < 8 \quad \therefore x < 4$$

$$\text{그런데 } x \geq 3 \text{이므로 } 3 \leq x < 4$$

(i), (ii), (iii)에서 부등식의 해는

$$0 < x < 4$$

따라서 정수 x 는 1, 2, 3의 3개이다.

답 ③

09 ① $9x^2+1 \geq -6x$ 에서 $9x^2+6x+1 \geq 0$

이때 $9x^2+6x+1 = (3x+1)^2 \geq 0$ 이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

② $4x^2-4x+1 = (2x-1)^2 \leq 0$ 의 해는

$$x = \frac{1}{2}$$

③ $x^2+4x+3 = (x+3)(x+1) \leq 0$ 의 해는

$$-3 \leq x \leq -1$$

④ $x^2-12x+36 = (x-6)^2 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 해는

$$x \neq 6 \text{인 모든 실수이다.}$$

⑤ $12x+9 < -4x^2$ 에서 $4x^2+12x+9 < 0$

이때 $4x^2+12x+9 = (2x+3)^2 \geq 0$ 이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

따라서 해가 존재하지 않는 것은 ⑤이다.

답 ⑤

10 x 에 대한 이차부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$ 의 해가 오직 $x = -2$ 뿐이므로 $a < 0$

해가 $x = -2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+2)^2 \leq 0 \quad \therefore x^2+4x+4 \leq 0$$

양변에 a 를 곱하면

$$ax^2+4ax+4a \geq 0$$

이 부등식이 $ax^2+bx+c \geq 0$ 과 일치하므로

$$b=4a, c=4a$$

이를 $bx^2-24ax+9c < 0$ 에 대입하면

$$4ax^2-24ax+36a < 0$$

양변을 $4a$ 로 나누면

$$x^2-6x+9 > 0 \quad (\because a < 0), (x-3)^2 > 0$$

$$\therefore x \neq 3 \text{인 모든 실수}$$

답 ⑤

11 이차부등식 $f(x) \geq 0$ 의 해가 $x \leq 2$ 또는 $x \geq 7$ 이므로

$$f(x) = a(x-2)(x-7) \quad (a > 0) \text{로 놓으면}$$

$$f(3x-5) = a\{(3x-5)-2\}\{(3x-5)-7\}$$

$$= a(3x-7)(3x-12)$$

$$= 3a(3x-7)(x-4)$$

부등식 $f(3x-5) < 0$, 즉 $3a(3x-7)(x-4) < 0$ 에서

$$(3x-7)(x-4) < 0 \quad (\because a > 0) \quad \therefore \frac{7}{3} < x < 4$$

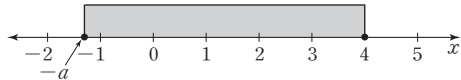
따라서 부등식 $f(3x-5) < 0$ 을 만족시키는 정수 x 의 값은 3이다.

답 ④

12 $x^2+(a-4)x-4a \leq 0$ 에서 $(x-4)(x+a) \leq 0$

$$\therefore -a \leq x \leq 4 \quad (\because a > 0)$$

이를 만족시키는 정수 x 가 6개이므로 다음 그림에서



$$-2 < -a \leq -1$$

$$\therefore 1 \leq a < 2$$

답 ③

- 13 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2(k-2)x - k^2 + 5k - 3 \geq 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-2)x - k^2 + 5k - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(k-2)\}^2 - 1 \times (-k^2 + 5k - 3) \leq 0$$

$$k^2 - 4k + 4 + k^2 - 5k + 3 \leq 0, 2k^2 - 9k + 7 \leq 0$$

$$(k-1)(2k-7) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq k \leq \frac{7}{2}$$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3이므로 모든 정수 k 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 = 6$$

답 ③

- 14 이차부등식 $x^2 + 2(a+2)x + 9a < 0$ 의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2(a+2)x + 9a \geq 0$ 이 성립해야 한다. 즉, 이차방정식 $x^2 + 2(a+2)x + 9a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+2)^2 - 1 \times 9a \leq 0$$

$$a^2 + 4a + 4 - 9a \leq 0, a^2 - 5a + 4 \leq 0$$

$$(a-1)(a-4) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq a \leq 4$$

답 ④

- 15 이차함수 $y = -x^2 + 4x - 7$ 의 그래프가 직선 $y = m(x-1)$ 보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $-x^2 + 4x - 7 < m(x-1)$, 즉 $x^2 + (m-4)x + 7 - m > 0$ 이 성립해야 한다. 따라서 이차방정식 $x^2 + (m-4)x + 7 - m = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (m-4)^2 - 4 \times 1 \times (7-m) < 0$$

$$m^2 - 8m + 16 - 28 + 4m < 0, m^2 - 4m - 12 < 0$$

$$(m+2)(m-6) < 0 \quad \therefore -2 < m < 6$$

따라서 $\alpha = -2$, $\beta = 6$ 이므로

$$\alpha\beta = -2 \times 6 = -12$$

답 ②

- 16 $x^2 < 3x + 18$ 에서 $x^2 - 3x - 18 < 0$

$$(x+3)(x-6) < 0 \quad \therefore -3 < x < 6 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2 - x \geq 2 \text{에서 } x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$(x+1)(x-2) \geq 0 \quad \therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 2 \quad \dots\dots ㉡$$

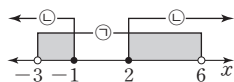
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-3 < x \leq -1 \text{ 또는 } 2 \leq x < 6$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 2, 3, 4,$

5의 6개이다.

답 ②



- 17 $x^2 - 6x + 8 > 0$ 에서 $(x-2)(x-4) > 0$

$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 4 \quad \dots\dots ㉠$$

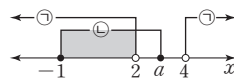
$$x^2 + (1-a)x - a \leq 0 \text{에서 } (x+1)(x-a) \leq 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분이 $-1 \leq x < 2$ 가

되어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$2 \leq a < 4$$

답 ④



- 18 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 에서 $(x+1)(x-3) < 0$

$$\therefore -1 < x < 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2 - (a+4)x + 4a \leq 0 \text{에서 } (x-a)(x-4) \leq 0 \quad \dots\dots ㉡$$

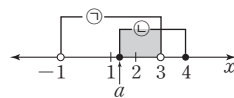
㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수 x

가 1개이므로 오른쪽 그림에서

$$1 < a \leq 2$$

따라서 정수 a 의 값은 2이다.

답 ②



- 19 장미 한 송이의 가격을 100원씩 x 번 ($0 < x < 30$)원 내리면 장미 한 송이의 가격은 $(3000 - 100x)$ 원, 하루 장미 판매량은 $(150 + 10x)$ 송이다.

하루 장미 판매량이 240송이 이하이어야 하므로

$$150 + 10x \leq 240, 10x \leq 90 \quad \therefore 0 < x \leq 9 \quad \dots\dots ㉠$$

하루 장미 판매 금액이 494000원 이상이어야 하므로

$$(3000 - 100x)(150 + 10x) \geq 494000$$

$$-1000x^2 + 15000x + 450000 \geq 494000$$

$$-x^2 + 15x + 450 \geq 494, x^2 - 15x + 44 \leq 0$$

$$(x-4)(x-11) \leq 0 \quad \therefore 4 \leq x \leq 11 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

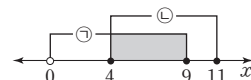
$$4 \leq x \leq 9$$

따라서

$$2100 \leq 3000 - 100x \leq 2600$$

이므로 장미 한 송이의 가격은 2100원 이상 2600원 이하이다.

답 ③



- 20 이차방정식 $x^2 - kx + k = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (-k)^2 - 4 \times 1 \times k \geq 0$$

$$k^2 - 4k \geq 0, k(k-4) \geq 0$$

$$\therefore k \leq 0 \text{ 또는 } k \geq 4 \quad \dots\dots ㉠$$

이차방정식 $x^2 + 2kx + 5k + 6 = 0$ 이 허근을 가지므로 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = k^2 - 1 \times (5k + 6) < 0$$

$$k^2 - 5k - 6 < 0, (k+1)(k-6) < 0$$

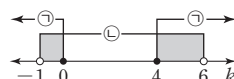
$$\therefore -1 < k < 6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-1 < k \leq 0 \text{ 또는 } 4 \leq k < 6$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 5이다.

답 ④



- 21 $P(x) = x^3 + (k+2)x^2 + (3k+3)x + 2k + 6$ 이라 하면

$$P(-2) = -8 + 4(k+2) - 2(3k+3) + 2k + 6 = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & k+2 & 3k+3 & 2k+6 & \\ & & -2 & -2k & -2k-6 & \\ \hline & 1 & k & k+3 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x+2)(x^2+kx+k+3)$$

$$P(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x^2+kx+k+3=0$$

삼차방정식 $P(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2+kx+k+3=0$ 은 -2 가 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 즉, 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=k^2-4 \times 1 \times (k+3) > 0$$

$$k^2-4k-12 > 0, (k+2)(k-6) > 0$$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x^2+kx+k+3=0 \text{이 } -2 \text{를 근으로 갖지 않으므로}$$

$$4-2k+k+3 \neq 0 \quad \therefore k \neq 7 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 의 공통부분을 구하면

$$k < -2 \text{ 또는 } 6 < k < 7 \text{ 또는 } k > 7$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 8이다.

답 ④

22 이차방정식 $x^2-(k^2-k-6)x-3k+2=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta = -3k+2 < 0, -3k < -2$$

$$\therefore k > \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

$$\alpha + \beta = k^2 - k - 6 < 0, (k+2)(k-3) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 의 공통부분을 구하면

$$\frac{2}{3} < k < 3$$

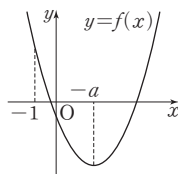
따라서 정수 k 는 1, 2이므로 모든

정수 k 의 값의 합은

$$1+2=3$$

답 ③

23 $f(x)=x^2+2ax-2a+15$ 라 할 때, 이차방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근이 모두 -1 보다 크려면 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 1 \times (-2a+15) > 0$$

$$a^2+2a-15 > 0, (a+5)(a-3) > 0$$

$$\therefore a < -5 \text{ 또는 } a > 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $f(-1) > 0$ 이므로

$$f(-1) = 1 - 2a - 2a + 15 > 0$$

$$-4a > -16 \quad \therefore a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축 $x=-a$ 가 직선 $x=-1$ 의 오른쪽에 있으므로

$$-a > -1 \quad \therefore a < 1 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

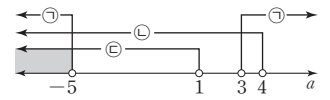
(i), (ii), (iii)에서 $\textcircled{7}, \textcircled{8}, \textcircled{9}$ 의

공통부분을 구하면

$$a < -5$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -6 이다.

답 ①



24 $x^4-2(k+1)x^2-5k+19=0$ 에서 $x^2=t$ 로 놓으면

$$t^2-2(k+1)t-5k+19=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{7}$ 은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) $\textcircled{7}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(k+1)\}^2 - 1 \times (-5k+19) > 0$$

$$k^2+2k+1+5k-19 > 0, k^2+7k-18 > 0$$

$$(k+9)(k-2) > 0 \quad \therefore k < -9 \text{ 또는 } k > 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

(ii) $\textcircled{7}$ 의 두 실근의 합이 0보다 크므로

$$2(k+1) > 0, k+1 > 0 \quad \therefore k > -1 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

(iii) $\textcircled{7}$ 의 두 실근의 곱이 0보다 크므로

$$-5k+19 > 0, 5k < 19 \quad \therefore k < \frac{19}{5} \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

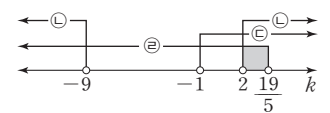
(i), (ii), (iii)에서 $\textcircled{8}, \textcircled{9}, \textcircled{10}$ 의

공통부분을 구하면

$$2 < k < \frac{19}{5}$$

따라서 정수 k 는 3의 1개이다.

답 ①



25 $1 < |x-3| < 5$ 에서

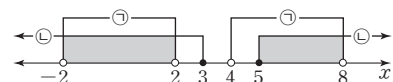
$$-5 < x-3 < -1 \text{ 또는 } 1 < x-3 < 5$$

$$\therefore -2 < x < 2 \text{ 또는 } 4 < x < 8 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$-2x^2+16x-30 \leq 0 \text{에서 } x^2-8x+15 \geq 0$$

$$(x-3)(x-5) \geq 0 \quad \therefore x \leq 3 \text{ 또는 } x \geq 5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 의 공통부분을 구하면



$$-2 < x < 2 \text{ 또는 } 5 \leq x < 8$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 5, 6, 7$ 의 6개이다.

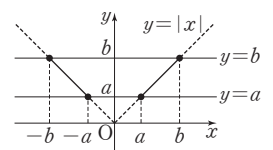
답 ③

참고 양수 a, b ($a < b$)에 대하여

$a < |x| < b$ 일 때,

$$-b < x < -a \text{ 또는 } a < x < b$$

이다.



변형유형 집중공략

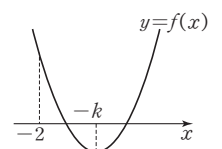
p.20~23

1-1 $f(x)=x^2+2kx+2k+8$ 이라 하면 이

차방정식 $f(x)=0$ 의 두 실근이 모두

-2 보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 1 \times (2k+8) \geq 0$$

$$k^2 - 2k - 8 \geq 0, (k+2)(k-4) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -2 \text{ 또는 } k \geq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $f(-2) > 0$ 이므로

$$f(-2) = 4 - 4k + 2k + 8 > 0$$

$$-2k > -12 \quad \therefore k < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축 $x=-k$ 가 직선 $x=-2$ 의 오른쪽에 있으므로

$$-k > -2 \quad \therefore k < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

(i), (ii), (iii)에서 ㉠, ㉡, ㉢

의 공통부분을 구하면

$$k \leq -2$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -2 이다.

답 -2

참고 (i)에서 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 실근이 서로 다르다는 조건이 없으므로 중근인 실근도 가능하다.

즉, 판별식 D 에 대하여 $D \geq 0$ 이다.

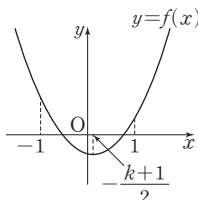
1-2 $f(x)=x^2+(k+1)x+2k+2$ 라 하면

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 실근이 -1

과 1 사이에 있으므로 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같

아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$D = (k+1)^2 - 4 \times 1 \times (2k+2) \geq 0$$

$$k^2 + 2k + 1 - 8k - 8 \geq 0, k^2 - 6k - 7 \geq 0$$

$$(k+1)(k-7) \geq 0 \quad \therefore k \leq -1 \text{ 또는 } k \geq 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축 $x=-\frac{k+1}{2}$ 이 두 직선

$x=-1, x=1$ 사이에 있으므로

$$-1 < -\frac{k+1}{2} < 1, -2 < k+1 < 2$$

$$\therefore -3 < k < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

(iii) $f(-1) > 0$ 이므로

$$f(-1) = 1 - (k+1) + 2k + 2 > 0$$

$$k+2 > 0 \quad \therefore k > -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

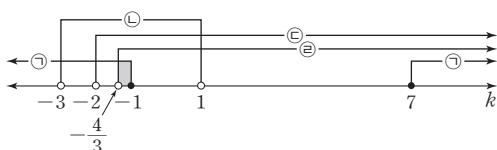
(iv) $f(1) > 0$ 이므로

$$f(1) = 1 + (k+1) + 2k + 2 > 0$$

$$3k+4 > 0, 3k > -4$$

$$\therefore k > -\frac{4}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

(i) ~ (iv)에서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣의 공통부분을 구하면



$$-\frac{4}{3} < k \leq -1$$

답 $-\frac{4}{3} < k \leq -1$

2-1 $f(x)=x^2-4x-4k+11$ 이라 하면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프

의 축은 직선 $x=2$ 이고, 그래프는 아래로 볼록하다.

$3 \leq x \leq 6$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최

솟값을 가지므로 $3 \leq x \leq 6$ 에서 $f(x) \geq 0$

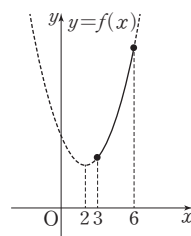
이 항상 성립하려면 오른쪽 그림과 같이

$f(3) \geq 0$ 이어야 한다.

$$f(3) = 9 - 12 - 4k + 11 \geq 0 \text{에서}$$

$$-4k \geq -8 \quad \therefore k \leq 2$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 2이다.



답 ③

2-2 $f(x) \leq g(x)$ 에서

$$x^2 - 3x + 2a - 2 \leq -x^2 + x + 2$$

$$2x^2 - 4x + 2a - 4 \leq 0 \quad \therefore x^2 - 2x + a - 2 \leq 0$$

$h(x)=x^2-2x+a-2$ 라 하면 이차함수 $y=h(x)$ 의 그래프의

축은 직선 $x=1$ 이고, 그래프는 아래로 볼록하다.

$-1 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $h(x)$ 는 $x=-1$

에서 최댓값을 가지므로

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $h(x) \leq 0$ 이 항상 성립하

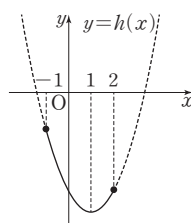
려면 오른쪽 그림과 같이 $h(-1) \leq 0$ 이어

야 한다.

$$h(-1) = 1 + 2 + a - 2 \leq 0 \text{에서}$$

$$a \leq -1$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -1 이다.



답 ⑤

3-1 $P(x)=x^3+3x^2+(-k^2+k)x-4k^2$ 이라 하면

$$P(k) = k^3 + 3k^2 + k(-k^2+k) - 4k^2 = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & 3 & -k^2+k & -4k^2 \\ & & k & k^2+3k & 4k^2 \\ \hline & 1 & k+3 & 4k & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x-k)\{x^2 + (k+3)x + 4k\}$$

$$P(x)=0 \text{에서 } x=k \text{ 또는 } x^2 + (k+3)x + 4k = 0$$

삼차방정식 $P(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정

식 $x^2 + (k+3)x + 4k = 0$ 은 k 가 아닌 서로 다른 두 실근을 가져

야 한다. 즉, 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (k+3)^2 - 4 \times 1 \times 4k > 0$$

$$k^2 + 6k + 9 - 16k > 0, k^2 - 10k + 9 > 0$$

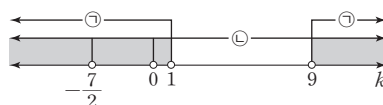
$$(k-1)(k-9) > 0 \quad \therefore k < 1 \text{ 또는 } k > 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $x^2 + (k+3)x + 4k = 0$ 이 k 를 근으로 갖지 않으므로

$$k^2 + k(k+3) + 4k \neq 0, 2k^2 + 7k \neq 0$$

$$k(2k+7) \neq 0 \quad \therefore k \neq 0 \text{이고 } k \neq -\frac{7}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$$k < -\frac{7}{2} \text{ 또는 } -\frac{7}{2} < k < 0 \text{ 또는 } 0 < k \leq 1 \text{ 또는 } k > 9$$

따라서 $\alpha = -\frac{7}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 9$ 이므로

$$\alpha\beta + \gamma\delta = -\frac{7}{2} \times 0 + 1 \times 9 = 9$$

답 9

3-2 $P(x) = x^3 + (3k-6)x^2 + (6k^2-6k)x + 4k^3$ 이라 하면

$$P(-k) = -k^3 + k^2(3k-6) - k(6k^2-6k) + 4k^3 = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -k & 1 & 3k-6 & 6k^2-6k & 4k^3 \\ & & -k & -2k^2+6k & -4k^3 \\ \hline & 1 & 2k-6 & 4k^2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x+k)\{x^2 + (2k-6)x + 4k^2\}$$

$$P(x) = 0 \text{에서 } x = -k \text{ 또는 } x^2 + (2k-6)x + 4k^2 = 0$$

삼차방정식 $P(x) = 0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2 + (2k-6)x + 4k^2 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 가져야 한다. 즉, 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 1 \times 4k^2 < 0$$

$$k^2 - 6k + 9 - 4k^2 < 0, -3k^2 - 6k + 9 < 0$$

$$k^2 + 2k - 3 > 0, (k+3)(k-1) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 1$$

답 $k < -3$ 또는 $k > 1$

4-1 $x^2 + 4x - 21 \geq 0$ 에서 $(x+7)(x-3) \geq 0$

$$\therefore x \leq -7 \text{ 또는 } x \geq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 5kx - 6k^2 < 0 \text{에서}$$

$$(x+k)(x-6k) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(i) $k < 0$ 일 때, $-k > 0$, $6k < 0$ 이므로 $\textcircled{2}$ 의 해는

$$6k < x < -k$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분이 존재하지 않

도록 수직선 위에 나타내면 오른

쪽 그림과 같으므로

$$6k \geq -7, -k \leq 3$$

$$k \geq -\frac{7}{6}, k \geq -3 \quad \therefore k \geq -\frac{7}{6}$$

$$\text{그런데 } k < 0 \text{이므로 } -\frac{7}{6} \leq k < 0$$

(ii) $k = 0$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서 $x^2 < 0$ 이므로 $\textcircled{2}$ 의 해가 존재하지 않는다.

(iii) $k > 0$ 일 때, $-k < 0$, $6k > 0$ 이므로 $\textcircled{2}$ 의 해는

$$-k < x < 6k$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분이 존재하지 않

도록 수직선 위에 나타내면 오른

쪽 그림과 같으므로

$$-k \geq -7, 6k \leq 3$$

$$k \leq 7, k \leq \frac{1}{2} \quad \therefore k \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{그런데 } k > 0 \text{이므로 } 0 < k \leq \frac{1}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 실수 k 의 값의 범위는 $-\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{1}{2}$

따라서 정수 k 는 $-1, 0$ 의 2개이다.

답 ②

4-2 $x^2 + 5x + 6 \leq 0$ 에서 $(x+3)(x+2) \leq 0$

$$\therefore -3 \leq x \leq -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

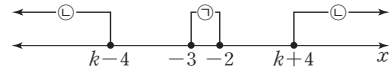
$$x^2 - 2kx + k^2 - 16 \geq 0 \text{에서}$$

$$x^2 - 2kx + (k+4)(k-4) \geq 0$$

$$\{x - (k+4)\} \{x - (k-4)\} \geq 0$$

$$\therefore x \leq k-4 \text{ 또는 } x \geq k+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분이 존재하지 않아야 하므로 다음 그림에서



$$k-4 < -3, -2 < k+4$$

$$k < 1, k > -6$$

$$\therefore -6 < k < 1$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 0, 최솟값은 -5 이므로

$$M = 0, m = -5$$

$$\therefore M + m = 0 + (-5) = -5$$

답 -5

서술형 What & How

p.24~27

1 $2|x+1| - |x-3| \leq 5$ 에서

(i) $x < -1$ 일 때

$$-2(x+1) + (x-3) \leq 5, -2x-2+x-3 \leq 5$$

$$-x-5 \leq 5, -x \leq 10 \quad \therefore x \geq -10$$

$$\text{그런데 } x < -1 \text{이므로 } -10 \leq x < -1$$

(ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$2(x+1) + (x-3) \leq 5, 2x+2+x-3 \leq 5$$

$$3x-1 \leq 5, 3x \leq 6 \quad \therefore x \leq 2$$

$$\text{그런데 } -1 \leq x < 3 \text{이므로 } -1 \leq x \leq 2$$

(iii) $x \geq 3$ 일 때

$$2(x+1) - (x-3) \leq 5, 2x+2-x+3 \leq 5$$

$$x+5 \leq 5 \quad \therefore x \leq 0$$

$$\text{그런데 } x \geq 3 \text{이므로 해는 없다.}$$

..... ①

(i), (ii), (iii)에서 부등식의 해는 $-10 \leq x \leq 2$

..... ②

따라서 정수 x 는 $-10, -9, -8, \dots, 2$ 의 13개이다.

..... ③

답 13

2 $|x+5| - |x-4| > -3$ 에서

(i) $x < -5$ 일 때

$$-(x+5) + (x-4) > -3, -x-5+x-4 > -3$$

$$\therefore -9 > -3$$

즉, $x < -5$ 에서 부등식은 성립하지 않는다.

(ii) $-5 \leq x < 4$ 일 때

$$(x+5) + (x-4) > -3, 2x+1 > -3$$

$$2x > -4 \quad \therefore x > -2$$

$$\text{그런데 } -5 \leq x < 4 \text{이므로 } -2 < x < 4$$

(iii) $x \geq 4$ 일 때

$$(x+5)-(x-4) > -3, x+5-x+4 > -3$$

$$\therefore 9 > -3$$

즉, 부등식은 주어진 범위에서 항상 성립하므로

$$x \geq 4$$

..... ①

(i), (ii), (iii)에서 부등식의 해는 $x > -2$

..... ②

따라서 정수 x 의 최솟값은 -1 이다.

..... ③

답 -1

채점기준	배점
① x 의 값의 범위를 나누어 각 경우의 부등식 풀기	3
② 부등식의 해 구하기	2
③ 정수 x 의 최솟값 구하기	1

3 이차부등식 $ax^2-2x+b \geq 0$ 의 해가 $-4 \leq x \leq 2$ 이므로 $a < 0$ 이고

$$a(x+4)(x-2) \geq 0$$

$$a(x^2+2x-8) \geq 0 \quad \therefore ax^2+2ax-8a \geq 0 \quad \text{..... ①}$$

이것이 $ax^2-2x+b \geq 0$ 과 일치하므로

$$2a = -2, -8a = b \quad \therefore a = -1, b = 8 \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore b-a = 8 - (-1) = 9 \quad \text{..... ③}$$

답 9

4 이차부등식 $ax^2+3x+b < 0$ 의 해가 $x < -\frac{1}{2}$ 또는 $x > 2$ 이므로 $a < 0$ 이고

$$a\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2) < 0$$

$$a\left(x^2-\frac{3}{2}x-1\right) < 0 \quad \therefore ax^2-\frac{3}{2}ax-a < 0 \quad \text{..... ①}$$

이것이 $ax^2+3x+b < 0$ 과 일치하므로

$$-\frac{3}{2}a = 3, -a = b \quad \therefore a = -2, b = 2 \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore a-b = -2-2 = -4 \quad \text{..... ③}$$

답 -4

채점기준	배점
① a 의 부호를 구하고 이차부등식 세우기	3
② 계수를 비교하여 a, b 의 값 각각 구하기	2
③ $a-b$ 의 값 구하기	1

5 $(m+3)x^2-2(m+3)x+8 > 0$ 에서

(i) $m = -3$ 일 때, $8 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다. ①

(ii) $m \neq -3$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y = (m+3)x^2-2(m+3)x+8$ 의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$$m+3 > 0 \quad \therefore m > -3 \quad \text{..... ①}$$

이차방정식 $(m+3)x^2-2(m+3)x+8=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(m+3)\}^2 - (m+3) \times 8 < 0$$

$$m^2+6m+9-8m-24 < 0, m^2-2m-15 < 0$$

$$(m+3)(m-5) < 0 \quad \therefore -3 < m < 5 \quad \text{..... ①}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{1} \text{의 공통부분을 구하면 } -3 < m < 5 \quad \text{..... ②}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } -3 \leq m < 5 \quad \text{..... ③}$$

답 $-3 \leq m < 5$

6 부등식 $(m-3)x^2-2(m-3)x+3 \leq 0$ 의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$(m-3)x^2-2(m-3)x+3 > 0 \quad \text{..... ①}$$

이 성립해야 한다.

(i) $m=3$ 일 때, $3 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식 ①이 항상 성립한다. ①

(ii) $m \neq 3$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 부등식 ①이 성립하려면 이차함수 $y = (m-3)x^2-2(m-3)x+3$ 의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$$m-3 > 0 \quad \therefore m > 3 \quad \text{..... ②}$$

이차방정식 $(m-3)x^2-2(m-3)x+3=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(m-3)\}^2 - (m-3) \times 3 < 0$$

$$m^2-6m+9-3m+9 < 0, m^2-9m+18 < 0$$

$$(m-3)(m-6) < 0 \quad \therefore 3 < m < 6 \quad \text{..... ③}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{의 공통부분을 구하면 } 3 < m < 6 \quad \text{..... ②}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } 3 \leq m < 6$$

따라서 정수 m 은 3, 4, 5이므로 모든 정수 m 의 값의 합은

$$3+4+5=12 \quad \text{..... ③}$$

답 12

채점기준	배점
① $m=3$ 일 때, 부등식 ①이 성립함을 설명하기	2
② $m \neq 3$ 일 때, 조건을 만족시키는 m 의 값의 범위 구하기	3
③ m 의 값의 범위와 모든 정수 m 의 값의 합 구하기	1

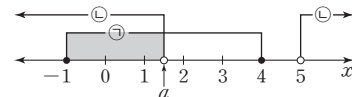
7 $x^2-3x-4 \leq 0$ 에서

$$(x+1)(x-4) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 4 \quad \text{..... ①} \quad \text{..... ①}$$

$x^2-(a+5)x+5a > 0$ 에서

$$(x-a)(x-5) > 0 \quad \text{..... ②} \quad \text{..... ②}$$

①, ②을 동시에 만족시키는 정수 x 가 3개이므로 다음 그림에서



$$1 < a \leq 2 \quad \text{..... ③}$$

답 $1 < a \leq 2$

8 $x^2+2x-8 < 0$ 에서

$$(x+4)(x-2) < 0 \quad \therefore -4 < x < 2 \quad \text{..... ①} \quad \text{..... ①}$$

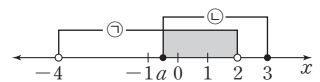
$x^2-(a+3)x+3a \leq 0$ 에서

$$(x-a)(x-3) \leq 0 \quad \text{..... ②} \quad \text{..... ②}$$

①, ②을 동시에 만족시키는

정수 x 가 2개이므로 오른쪽

그림에서



$$-1 < a \leq 0$$

..... ③

답 $-1 < a \leq 0$

채점기준	배점
① 이차부등식 $x^2+2x-8 < 0$ 의 해 구하기	2
② 이차부등식 $x^2-(a+3)x+3a \leq 0$ 의 좌변을 인수분해하여 나타내기	2
③ a 의 값의 범위 구하기	3

실전 문제 | 1회

p.28~32

01 $-3x+1 > x+a$ 에서 $-4x > a-1$

$$\therefore x < -\frac{a-1}{4}$$

$$x-7 \leq 2(x-1)+b \text{에서 } x-7 \leq 2x-2+b$$

$$-x \leq b+5 \quad \therefore x \geq -b-5$$

주어진 연립부등식의 해가 $-3 \leq x < 1$ 이므로

$$-b-5 = -3, \quad -\frac{a-1}{4} = 1$$

$$\therefore a = -3, \quad b = -2$$

$$\therefore a+b = -3+(-2) = -5$$

답 ①

02 $3x+7 \leq 5x-2$ 에서

$$-2x \leq -9 \quad \therefore x \geq \frac{9}{2} \quad \text{..... ㉠}$$

$$2x-3 > 3x-m \text{에서}$$

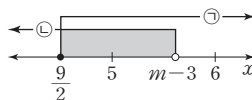
$$-x > -m+3 \quad \therefore x < m-3 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수

x 가 1개이므로 오른쪽 그림에서

$$5 < m-3 \leq 6 \quad \therefore 8 < m \leq 9$$

따라서 실수 m 의 최댓값은 9이다.

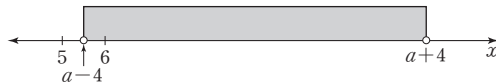


답 ⑤

03 $|x-a| < 4$ 에서 $-4 < x-a < 4$

$$\therefore a-4 < x < a+4$$

이를 만족시키는 정수 x 의 최솟값이 6이므로 다음 그림에서



$$5 \leq a-4 < 6 \quad \therefore 9 \leq a < 10$$

따라서 정수 a 의 값은 9이다.

답 ④

04 $|x-1| > |2x+7|$ 에서

$$(i) x < -\frac{7}{2} \text{일 때}$$

$$-(x-1) > -(2x+7), \quad x-1 < 2x+7$$

$$-x < 8 \quad \therefore x > -8$$

$$\text{그런데 } x < -\frac{7}{2} \text{이므로 } -8 < x < -\frac{7}{2}$$

$$(ii) -\frac{7}{2} \leq x < 1 \text{일 때}$$

$$-(x-1) > 2x+7, \quad -x+1 > 2x+7$$

$$-3x > 6 \quad \therefore x < -2$$

$$\text{그런데 } -\frac{7}{2} \leq x < 1 \text{이므로 } -\frac{7}{2} \leq x < -2$$

$$(iii) x \geq 1 \text{일 때}$$

$$x-1 > 2x+7, \quad -x > 8 \quad \therefore x < -8$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 해는 없다.

(i), (iii)에서 부등식의 해는

$$-8 < x < -2$$

따라서 정수 x 는 $-7, -6, -5, -4, -3$ 의 5개이다.

답 ①

05 상자의 개수를 x 라 할 때, 한 상자에 사탕을 50개씩 넣으면 사탕이 30개 이상 남으므로

$$680-50x \geq 30, \quad -50x \geq -650 \quad \therefore x \leq 13 \quad \text{..... ㉠}$$

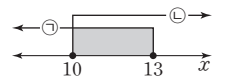
한 상자에 사탕을 70개씩 넣으면 모든 상자를 채우기에 사탕이 20개 이상 부족하므로

$$70x-680 \geq 20, \quad 70x \geq 700 \quad \therefore x \geq 10 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$10 \leq x \leq 13$$

따라서 상자의 개수의 최댓값은 13이다.



답 ④

06 $f(-2)=0, f(1)=0$ 이므로

$$f(x)=a(x+2)(x-1) \quad (a>0) \text{로 놓으면}$$

$$f(0)=-2 \text{이므로}$$

$$f(0)=a \times 2 \times (-1) = -2 \quad \therefore a=1$$

따라서 $f(x)=(x+2)(x-1)$ 이므로 부등식 $f(x) \geq 4$ 에서

$$(x+2)(x-1) \geq 4, \quad x^2+x-2 \geq 4$$

$$x^2+x-6 \geq 0, \quad (x+3)(x-2) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 2$$

답 ①

07 모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt{x^2-4kx-4k+8}$ 이 실수가 되려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2-4kx-4k+8 \geq 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $x^2-4kx-4k+8=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2k)^2 - 1 \times (-4k+8) \leq 0$$

$$4k^2+4k-8 \leq 0, \quad k^2+k-2 \leq 0$$

$$(k+2)(k-1) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq k \leq 1$$

답 ②

08 $\sqrt{a}\sqrt{\beta} = -\sqrt{a\beta}$ 에서 $a\beta=0$ 또는 $a < 0, \beta < 0$

(i) $a\beta=0$ 일 때

근과 계수의 관계에 의하여

$$a\beta=k+2=0 \quad \therefore k=-2$$

(ii) $a < 0, \beta < 0$ 일 때

이차방정식 $x^2-(k-1)x+k+2=0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(k-1)\}^2 - 4 \times 1 \times (k+2) \geq 0$$

$$k^2 - 2k + 1 - 4k - 8 \geq 0$$

$$k^2 - 6k - 7 \geq 0, (k+1)(k-7) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -1 \text{ 또는 } k \geq 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = k - 1 < 0 \quad \therefore k < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\alpha\beta = k + 2 > 0 \quad \therefore k > -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

①, ②, ③의 공통부분을 구하면

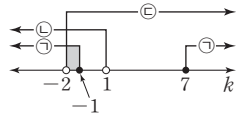
$$-2 < k \leq -1$$

(i), (ii)에서 $-2 \leq k \leq -1$

따라서 정수 k 는 $-2, -1$ 이므로 모든 정수 k 의 값의 합은

$$-2 + (-1) = -3$$

답 ②



09 $x^2 - 2x - 5 < |x - 1|$ 에서

(i) $x < 1$ 일 때

$$x^2 - 2x - 5 < -(x - 1), x^2 - 2x - 5 < -x + 1$$

$$x^2 - x - 6 < 0, (x + 2)(x - 3) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 3$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $-2 < x < 1$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 2x - 5 < x - 1, x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$(x + 1)(x - 4) < 0 \quad \therefore -1 < x < 4$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x < 4$

(i), (ii)에서 $-2 < x < 4$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

답 ②

10 $f(x)g(x) \leq 0$ 에서

$$\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

연립부등식 $\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ 의 해는 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나거나 x 축보다 아래쪽에 있고, 이차함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나거나 x 축보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$2 \leq x \leq 6$ $\cdots \cdots \textcircled{㉠}$

$$2 \leq x \leq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

연립부등식 $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$ 의 해는 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나거나 x 축보다 위쪽에 있고, 이차함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나거나 x 축보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$x \leq -1$ 또는 $x \geq 6$ $\cdots \cdots \textcircled{㉡}$

$$x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②에서 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

답 ⑤

11 $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 4 > 0$ 에서

(i) $m = 1$ 일 때

$4 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $m \neq 1$ 일 때

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 4 > 0$ 이 성립하려면 이차함수

$y = (m-1)x^2 - 2(m-1)x + 4$ 의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$$m - 1 > 0 \quad \therefore m > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이차방정식 $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(m-1)\}^2 - (m-1) \times 4 < 0$$

$$m^2 - 2m + 1 - 4m + 4 < 0, m^2 - 6m + 5 < 0$$

$$(m-1)(m-5) < 0 \quad \therefore 1 < m < 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$1 < m < 5$$

(i), (ii)에서 $1 \leq m < 5$

따라서 정수 m 은 $1, 2, 3, 4$ 이므로 모든 정수 m 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

답 ⑤

12 $(x+2)(x-1) \leq k(x-p)$ 에서 $x^2 + x - 2 \leq kx - kp$

$$x^2 + (-k+1)x + kp - 2 \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이차부등식 ①이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 해를 가져야 하므로 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (-k+1)x + kp - 2 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (-k+1)^2 - 4 \times 1 \times (kp-2) \geq 0$$

$$k^2 - 2k + 1 - 4kp + 8 \geq 0$$

$$\therefore k^2 + 2(-2p-1)k + 9 \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

이차부등식 ②이 실수 k 의 값에 관계없이 성립해야 하므로 이차방정식 $k^2 + 2(-2p-1)k + 9 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-2p-1)^2 - 1 \times 9 \leq 0$$

$$4p^2 + 4p + 1 - 9 \leq 0, 4p^2 + 4p - 8 \leq 0, p^2 + p - 2 \leq 0$$

$$(p+2)(p-1) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq p \leq 1$$

따라서 $a = -2, \beta = 1$ 이므로

$$\alpha + \beta = -2 + 1 = -1$$

답 ③

13 조건 ㉠에서

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-p)^2 + q_1, g(x) = (x-p)^2 + q_2 \quad (q_1, q_2 \text{는 상수})$$

풀이므로

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{2}(x-p)^2 + q_1 - \{(x-p)^2 + q_2\}$$

$$= -\frac{3}{2}(x-p)^2 + q_1 - q_2$$

이때 $f(x) - g(x)$ 는 최고차항의 계수가 $-\frac{3}{2}$ 인 이차함수이고,

조건 ㉡에서 이차부등식 $f(x) - g(x) \geq 0$ 의 해가 $-2 \leq x \leq 6$ 이므로

$$\begin{aligned}
 f(x)-g(x) &= -\frac{3}{2}(x+2)(x-6) \\
 &= -\frac{3}{2}(x^2-4x-12) \\
 &= -\frac{3}{2}(x-2)^2+24
 \end{aligned}$$

따라서 $p=2$ 이고,

$$f(3)-g(3)=-\frac{3}{2}\times 1+24=\frac{45}{2}$$

이므로

$$p\times\{f(3)-g(3)\}=2\times\frac{45}{2}=45$$

답 ④

- 14 $x^2+(2a+5)x+a^2+5a+4\leq 0$ 에서

$$x^2+(2a+5)x+(a+4)(a+1)\leq 0$$

$$\{x+(a+4)\}\{x+(a+1)\}\leq 0$$

$$\therefore -a-4\leq x\leq -a-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$-a-1-(-a-4)=3$ 이므로 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 정수 x 는 3개 또는 4개이다.

이때 모든 정수 x 의 값의 합이 6이므로 정수 x 는 0, 1, 2, 3 또는 1, 2, 3이다.

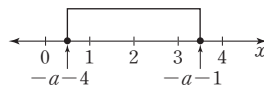
즉, 오른쪽 그림에서

$$0\leq -a-4<1, 3\leq -a-1<4$$

$$4\leq -a<5$$

$$\therefore -5<a\leq -4$$

답 ④



- 15 $f(-3)=f(5)=k$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축은

$$\text{직선 } x=\frac{-3+5}{2}=1 \text{이고, } x^2 \text{의 계수가 1이므로}$$

$$f(x)=(x-1)^2+a \quad (a \text{는 상수})$$

$$f(3)=a+4 \text{이므로 부등식 } f(x)<f(3) \text{에서}$$

$$(x-1)^2+a<a+4, x^2-2x+1+a<a+4$$

$$x^2-2x-3<0, (x+1)(x-3)<0$$

$$\therefore -1<x<3$$

따라서 $a=-1, \beta=3$ 이므로

$$\beta-a=3-(-1)=4$$

답 ④

- 16 $x^2-5x\leq 0$ 에서 $x(x-5)\leq 0$

$$\therefore 0\leq x\leq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2+3x-1\geq 2x+5 \text{에서 } x^2+x-6\geq 0$$

$$(x+3)(x-2)\geq 0 \quad \therefore x\leq -3 \text{ 또는 } x\geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$2\leq x\leq 5$$

이것이 부등식 $ax^2-7x+b\leq 0$ 의 해이므로

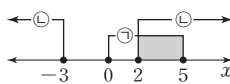
$$a(x-2)(x-5)\leq 0 \quad \therefore ax^2-7ax+10a\leq 0$$

즉, $-7a=-7, 10a=b$ 이므로

$$a=1, b=10$$

$$\therefore a+b=1+10=11$$

답 ③



- 17 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a 라 하면 조건 (가)에서

$$a<0$$

해가 $x\leq -2$ 또는 $x\geq 6$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+2)(x-6)\geq 0$$

양변에 a 를 곱하면

$$a(x+2)(x-6)\leq 0 \quad (\because a<0)$$

$$\therefore f(x)=a(x+2)(x-6)$$

$$=a(x^2-4x-12)$$

$$=a(x-2)^2-16a$$

$-3\leq x\leq 3$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$ 는 $x=2$

에서 최댓값 $-16a$ 를 갖는다.

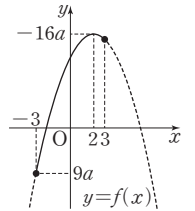
이때 조건 (나)에서 최댓값이 8이므로

$$-16a=8 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+8$ 이므로

$$f(8)=-\frac{1}{2}\times 6^2+8=-10$$

답 ②



- 18 $x^2-4x>0$ 에서 $x(x-4)>0$

$$\therefore x<0 \text{ 또는 } x>4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2-(a+3)x+3a<0 \text{에서}$$

$$(x-a)(x-3)<0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분에 속하는 정수

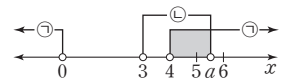
x 의 값이 5뿐이므로 오른쪽 그림

에서

$$5< a\leq 6$$

따라서 정수 a 의 값은 6이다.

답 ⑤



- 19 $-x^2+ax\leq a\leq 2x^2+(a-3)x+3$ 에서

$$\begin{cases} -x^2+ax\leq a \\ a\leq 2x^2+(a-3)x+3 \end{cases}$$

$$a\leq 2x^2+(a-3)x+3$$

$$-x^2+ax\leq a \text{에서 } x^2-ax+a\geq 0$$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식

$$x^2-ax+a=0 \text{의 판별식을 } D_1 \text{이라 하면}$$

$$D_1=(-a)^2-4\times 1\times a\leq 0$$

$$a^2-4a\leq 0, a(a-4)\leq 0$$

$$\therefore 0\leq a\leq 4$$

$$\cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a\leq 2x^2+(a-3)x+3 \text{에서 } 2x^2+(a-3)x+3-a\geq 0$$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식

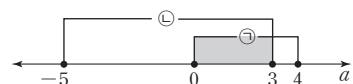
$$2x^2+(a-3)x+3-a=0 \text{의 판별식을 } D_2 \text{라 하면}$$

$$D_2=(a-3)^2-4\times 2\times (3-a)\leq 0$$

$$a^2-6a+9-24+8a\leq 0, a^2+2a-15\leq 0$$

$$(a+5)(a-3)\leq 0 \quad \therefore -5\leq a\leq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면



$$0 \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

답 ⑤

20 $x^4 - (a+12)x^2 - a^2 - 2a + 24 = 0$ 에서 $x^2 = t$ 로 놓으면

$$t^2 - (a+12)t - a^2 - 2a + 24 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

주어진 사차방정식의 네 근이 모두 실수가 되려면 t 에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근이 모두 0보다 크거나 같은 실수이어야 한다.

㉠의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(a+12)\}^2 - 4 \times 1 \times (-a^2 - 2a + 24) \geq 0$$

$$a^2 + 24a + 144 + 4a^2 + 8a - 96 \geq 0$$

$$5a^2 + 32a + 48 \geq 0, (a+4)(5a+12) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -4 \text{ 또는 } a \geq -\frac{12}{5} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 두 근이 모두 0보다 크거나 같아야 하므로

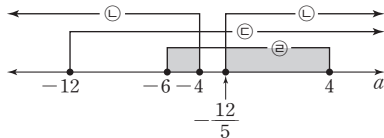
$$(\text{두 근의 합}) = a+12 \geq 0 \quad \therefore a \geq -12 \quad \dots\dots ㉢$$

$$(\text{두 근의 곱}) = -a^2 - 2a + 24 \geq 0$$

$$a^2 + 2a - 24 \leq 0, (a+6)(a-4) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq a \leq 4 \quad \dots\dots ㉣$$

㉡, ㉢, ㉣의 공통부분을 구하면



$$-6 \leq a \leq -4 \text{ 또는 } -\frac{12}{5} \leq a \leq 4 \quad \text{답 ⑤}$$

21 두 식품 A, B의 1g당 열량과 단백질의 양은 오른쪽 표와 같다.

식품	열량(kcal)	단백질(g)
A	3	0.2
B	1.8	0.12

식품 A의 섭취량을 x g이라 하면 식품 B의 섭취량은 $(400-x)$ g이고, 열량은 840 kcal 이하, 단백질은 50g 이상이므로

$$\begin{cases} 3x + 1.8(400-x) \leq 840 & \dots\dots ㉠ \\ 0.2x + 0.12(400-x) \geq 50 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$$

$$㉠에서 30x + 18(400-x) \leq 8400$$

$$30x + 7200 - 18x \leq 8400, 12x \leq 1200$$

$$\therefore x \leq 100 \quad \dots\dots ㉢$$

$$㉡에서 20x + 12(400-x) \geq 5000$$

$$20x + 4800 - 12x \geq 5000, 8x \geq 200$$

$$\therefore x \geq 25 \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $25 \leq x \leq 100$

따라서 식품 A는 25g 이상 100g 이하를 섭취해야 하므로

$$\alpha = 25, \beta = 100$$

$$\therefore \beta - \alpha = 100 - 25 = 75 \quad \text{답 75}$$

22 꽃밭의 한 변의 길이가 12m이고, 길의 폭이 x m이므로

$$0 < x < 12 \quad \dots\dots ㉠$$

꽃밭의 넓이가 64 m^2 이상이어야 하므로

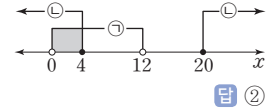
$$(12-x)(12-x) \geq 64, x^2 - 24x + 144 \geq 64$$

$$x^2 - 24x + 80 \geq 0, (x-4)(x-20) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 4 \text{ 또는 } x \geq 20 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$0 < x \leq 4$$



답 ②

23 $x^2 + xy + y^2 + 2x + ky + 3k - 2 > 0$ 에서

$$x^2 + (y+2)x + y^2 + ky + 3k - 2 > 0 \quad \dots\dots ㉠$$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (y+2)x + y^2 + ky + 3k - 2 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (y+2)^2 - 4 \times 1 \times (y^2 + ky + 3k - 2) < 0$$

$$y^2 + 4y + 4 - 4y^2 - 4ky - 12k + 8 < 0$$

$$-3y^2 - 2(2k-2)y - 12k + 12 < 0$$

$$3y^2 + 2(2k-2)y + 12k - 12 > 0 \quad \dots\dots ㉡$$

이 부등식이 모든 실수 y 에 대하여 성립하므로 y 에 대한 이차방정식 $3y^2 + 2(2k-2)y + 12k - 12 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (2k-2)^2 - 3 \times (12k-12) < 0$$

$$4k^2 - 8k + 4 - 36k + 36 < 0, 4k^2 - 44k + 40 < 0$$

$$k^2 - 11k + 10 < 0, (k-1)(k-10) < 0$$

$$\therefore 1 < k < 10 \quad \dots\dots ㉢$$

따라서 $\alpha = 1, \beta = 10$ 이므로

$$\alpha\beta = 1 \times 10 = 10 \quad \dots\dots ㉣$$

답 10

채점기준	배점
① 주어진 부등식을 x 에 대한 이차부등식으로 나타내기	1
② ㉠의 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립할 조건을 y 에 대한 이차부등식으로 나타내기	2
③ ㉡의 부등식이 모든 실수 y 에 대하여 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 값의 범위 구하기	2
④ $\alpha\beta$ 의 값 구하기	1

24 $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ 에서 $(x+2)(x-4) \geq 0$

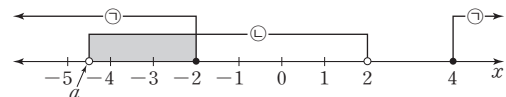
$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 4 \quad \dots\dots ㉠ \quad \dots\dots ㉡$$

$$x^2 - (a+2)x + 2a < 0 \text{에서}$$

$$(x-a)(x-2) < 0 \quad \dots\dots ㉢ \quad \dots\dots ㉣$$

(i) $a < 2$ 일 때, ㉢에서 $a < x < 2$

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수 x 가 3개이므로 다음 그림에서



$$-5 \leq a < -4$$

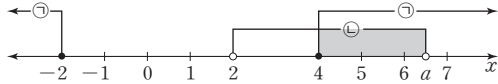
(ii) $a = 2$ 일 때, ㉢에서 $(x-2)^2 < 0$ $\therefore$ 해는 없다.

즉, 연립부등식의 해는 존재하지 않는다.

(iii) $a > 2$ 일 때

$$㉢에서 2 < x < a$$

㉠, ㉡의 공통부분에 속하는 정수 x 가 3개이므로 다음 그림에서



$$6 < a \leq 7 \quad \dots\dots ③$$

(i), (ii), (iii)에서 실수 a 의 값의 범위는

$$-5 \leq a < -4 \text{ 또는 } 6 < a \leq 7 \quad \dots\dots ④$$

$$\text{답 } -5 \leq a < -4 \text{ 또는 } 6 < a \leq 7$$

채점기준	배점
① 부등식 $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ 의 해 구하기	1
② 부등식 $x^2 - (a+2)x + 2a < 0$ 의 좌변을 인수분해하여 나타내기	1
③ $a < 2, a = 2, a > 2$ 일 때 a 의 값의 범위 각각 구하기	4
④ 실수 a 의 값의 범위 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.33~37

01 $|2x - a| < 7$ 에서 $-7 < 2x - a < 7$

$$-7 + a < 2x < 7 + a$$

$$\therefore \frac{-7+a}{2} < x < \frac{7+a}{2}$$

주어진 부등식의 해가 $-5 < x < b$ 이므로

$$\frac{-7+a}{2} = -5, \quad \frac{7+a}{2} = b$$

$$\therefore a = -3, b = 2$$

$$\therefore a + b = -3 + 2 = -1$$

답 ①

02 $x + 3a < 2$ 에서 $x < -3a + 2$ ㉠

$$2(x+2) \leq 3x-2 \text{에서 } 2x+4 \leq 3x-2$$

$$-x \leq -6 \quad \therefore x \geq 6 \quad \dots\dots ㉡$$

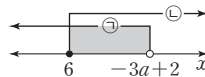
이때 연립부등식이 해를 가지려면 ㉠, ㉡의 공통부분이 있어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$-3a + 2 > 6$$

$$-3a > 4 \quad \therefore a < -\frac{4}{3}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -2 이다.

답 ②



03 $2x - 3 \leq x + a < 3x + 6$ 에서

$$\begin{cases} 2x - 3 \leq x + a \\ x + a < 3x + 6 \end{cases}$$

$$2x - 3 \leq x + a \text{에서 } x \leq a + 3$$

$$x + a < 3x + 6 \text{에서 } -2x < -a + 6$$

$$\therefore x > \frac{a-6}{2}$$

주어진 부등식의 해가 $-5 < x \leq b$ 이므로

$$\frac{a-6}{2} = -5, \quad a + 3 = b$$

$$\therefore a = -4, b = -1$$

$$\therefore a + b = -4 + (-1) = -5$$

답 ①

04 $f(x) = |x - 2| + |3x - 1|$ 라 하면

(i) $x < \frac{1}{3}$ 일 때

$$f(x) = -(x-2) - (3x-1) = -4x+3$$

(ii) $\frac{1}{3} \leq x < 2$ 일 때

$$f(x) = -(x-2) + (3x-1) = 2x+1$$

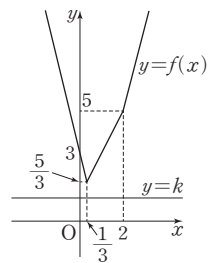
(iii) $x \geq 2$ 일 때

$$f(x) = (x-2) + (3x-1) = 4x-3$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -4x+3 & (x < \frac{1}{3}) \\ 2x+1 & (\frac{1}{3} \leq x < 2) \\ 4x-3 & (x \geq 2) \end{cases}$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 부등식 $f(x) \leq k$ 가 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > k$ 이어야 하므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $y = k$ 보다 항상 위쪽에 있어야 한다.

$$\therefore k < \frac{5}{3}$$



답 ④

05 $||x - 1| + 4| < 6$ 에서 $-6 < |x - 1| + 4 < 6$

$$-10 < |x - 1| < 2$$

모든 실수 x 에 대하여 $|x - 1| \geq 0$ 이므로

$$|x - 1| < 2$$

$$-2 < x - 1 < 2 \quad \therefore -1 < x < 3$$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2이므로 모든 정수 x 의 값의 합은

$$0 + 1 + 2 = 3$$

답 ③

06 방의 개수를 x 라 하면 학생은 $(4x + 12)$ 명이므로

$$6(x-3) + 1 \leq 4x + 12 \leq 6(x-3) + 6$$

$$\text{즉, } \begin{cases} 6(x-3) + 1 \leq 4x + 12 \\ 4x + 12 \leq 6(x-3) + 6 \end{cases}$$

$$6(x-3) + 1 \leq 4x + 12 \text{에서 } 6x - 17 \leq 4x + 12$$

$$2x \leq 29 \quad \therefore x \leq \frac{29}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$$4x + 12 \leq 6(x-3) + 6 \text{에서 } 4x + 12 \leq 6x - 12$$

$$-2x \leq -24 \quad \therefore x \geq 12 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$12 \leq x \leq \frac{29}{2}$$

따라서 방의 개수의 최댓값은 14이다.

답 ②

07 $4x + 6 > 2(x - b)$ 에서 $4x + 6 > 2x - 2b$

$$2x > -2b - 6 \quad \therefore x > -b - 3$$

$$2x - a < 5 \text{에서 } 2x < a + 5$$

$$\therefore x < \frac{a+5}{2}$$

주어진 연립부등식의 해가 $-8 < x < 4$ 이므로

$$-b-3=-8, \frac{a+5}{2}=4$$

$$\therefore a=3, b=5$$

이것을 $ax^2+3x+b \geq 0$ 에 대입하면

$$3x^2+3x+5 \geq 0$$

$$\text{이때 } 3x^2+3x+5=3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{4} \geq \frac{17}{4} \text{이므로 구하는 부등}$$

식의 해는 모든 실수이다.

답 ⑤

08 $\sqrt{4x^2-4x+1} \geq 3$ 에서 $\sqrt{(2x-1)^2} \geq 3$

$$|2x-1| \geq 3$$

$$2x-1 \leq -3 \text{ 또는 } 2x-1 \geq 3$$

$$2x \leq -2 \text{ 또는 } 2x \geq 4$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2-x-12 < 0 \text{에서 } (x+3)(x-4) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

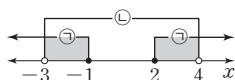
$$-3 < x \leq -1 \text{ 또는}$$

$$2 \leq x < 4$$

따라서 $M=3, m=-2$ 이므로

$$Mm=3 \times (-2)=-6$$

답 ③



09 조건 ㉠에서 $f(x)=a(x-5)^2$ ($a < 0$)이

므로 조건 ㉡에서

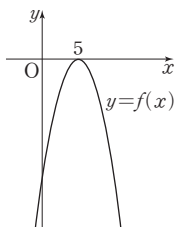
$$f(2)=a \times (-3)^2=-6$$

$$\therefore a=-\frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x)=-\frac{2}{3}(x-5)^2 \text{이므로}$$

$$f(-1)=-\frac{2}{3} \times (-6)^2=-24$$

답 ①



10 라면 한 그릇의 가격을 100원씩 x ($0 < x < 20$)번 내리면 라면

한 그릇의 가격은 $(2000-100x)$ 원, 하루 라면 판매량은

$(200+20x)$ 그릇이다.

하루 동안의 라면 판매액이 442000원 이상이 되어야 하므로

$$(2000-100x)(200+20x) \geq 442000$$

$$(20-x)(10+x) \geq 221, -x^2+10x+200 \geq 221$$

$$x^2-10x+21 \leq 0, (x-3)(x-7) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq x \leq 7$$

따라서 $1300 \leq 2000-100x \leq 1700$ 이므로 라면 한 그릇의 가격

의 최댓값은 1700원이다.

답 ③

11 $f(x) < g(x)$ 에서 $-2x^2+2ax < ax^2-4x+4$

$$\therefore (a+2)x^2-2(a+2)x+4 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $a \neq -2$ 일 때

$4 > 0$ 이므로 ①은 x 의 값에 관계없이 항상 성립한다.

(ii) $a = -2$ 일 때

①이 x 의 값에 관계없이 항상 성립하려면 이차함수

$y=(a+2)x^2-2(a+2)x+4$ 의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$$a+2 > 0 \quad \therefore a > -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또, 이차방정식 $(a+2)x^2-2(a+2)x+4=0$ 의 판별식을

D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(a+2)\}^2 - (a+2) \times 4 < 0$$

$$a^2+4a+4-4a-8 < 0, a^2-4 < 0$$

$$(a+2)(a-2) < 0 \quad \therefore -2 < a < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②, ③의 공통부분을 구하면 $-2 < a < 2$

(i), (ii)에서 실수 a 의 값의 범위는

$$-2 < a < 2$$

답 ③

12 두 이차방정식 $x^2-2ax+a+12=0, x^2-(a+3)x+1=0$ 중

적어도 하나는 허근을 가지려면 각각의 판별식을 D_1, D_2 라 할 때 $D_1 < 0$ 또는 $D_2 < 0$ 이다. 즉,

$$\frac{D_1}{4} = (-a)^2 - 1 \times (a+12) < 0$$

$$a^2-a-12 < 0, (a+3)(a-4) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$D_2 = \{-(a+3)\}^2 - 4 \times 1 \times 1 < 0$$

$$a^2+6a+5 < 0, (a+5)(a+1) < 0$$

$$\therefore -5 < a < -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ 또는 } \textcircled{2} \text{이므로 } -5 < a < 4$$

따라서 정수 a 는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 8개이다.

답 ④

다른풀이 두 이차방정식 중 적어도 하나는 허근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는 실수 전체에서 두 이차방정식이 모두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위를 제외하여 구하면 된다.

이차방정식 $x^2-2ax+a+12=0$ 이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (-a)^2 - 1 \times (a+12) \geq 0$$

$$a^2-a-12 \geq 0, (a+3)(a-4) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -3 \text{ 또는 } a \geq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2-(a+3)x+1=0$ 이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = \{-(a+3)\}^2 - 4 \times 1 \times 1 \geq 0$$

$$a^2+6a+5 \geq 0, (a+5)(a+1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -5 \text{ 또는 } a \geq -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

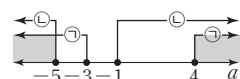
$$a \leq -5 \text{ 또는 } a \geq 4$$

따라서 두 이차방정식 중 적어도 하나

는 허근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$-5 < a < 4$$

이므로 정수 a 는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 8개이다.



13 $f(x)=mx^2+(m-4)x+4m$ 이라 하면 부등식 $f(x)>0$ 에서

(i) $m=0$ 일 때

$$-4x>0 \quad \therefore x<0$$

즉, 부등식 $f(x)>0$ 을 만족시키는 실수 x 가 존재한다.

(ii) $m>0$ 일 때

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 아래로 볼록하므로 부등식

$f(x)>0$ 을 만족시키는 실수 x 가 항상 존재한다.

(iii) $m<0$ 일 때

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 위로 볼록하므로 부등식

$f(x)>0$ 을 만족시키는 실수 x 가 존재하려면 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(m-4)^2-4 \times m \times 4m>0$$

$$m^2-8m+16-16m^2>0, 15m^2+8m-16<0$$

$$(3m+4)(5m-4)<0 \quad \therefore -\frac{4}{3}<m<\frac{4}{5}$$

그런데 $m<0$ 이므로 $-\frac{4}{3}<m<0$

(i), (ii), (iii)에서 실수 m 의 값의 범위는

$$m>-\frac{4}{3}$$

답 ①

14 $g(x)=|2x+1|$

$$= \begin{cases} 2x+1 & (x \geq -\frac{1}{2}) \\ -(2x+1) & (x < -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 교점의

x 좌표를 각각 α , β ($\alpha < -\frac{1}{2} < 0 < \beta$)

라 하면 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 를 만족시키는 실수 x 의 값의 범위는

$\alpha \leq x \leq \beta$ 이다.

α 는 방정식 $-x^2+7=-(2x+1)$ 의 해이므로

$$x^2-2x-8=0, (x+2)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=4$$

$$\therefore \alpha=-2 \left(\because \alpha < -\frac{1}{2} \right)$$

β 는 방정식 $-x^2+7=2x+1$ 의 해이므로

$$x^2+2x-6=0$$

$$\therefore x=\frac{-1 \pm \sqrt{1^2-1 \times (-6)}}{1}=-1 \pm \sqrt{7}$$

$$\therefore \beta=-1+\sqrt{7} \left(\because \beta > 0 \right)$$

이때 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 를 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-2 \leq x \leq -1+\sqrt{7}$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1$ 의 4개이다.

답 ④

다른풀이 부등식 $f(x) \geq g(x)$, 즉 $-x^2+7 \geq |2x+1|$ 에서

(i) $x < -\frac{1}{2}$ 일 때

$$-x^2+7 \geq -(2x+1), x^2-2x-8 \leq 0$$

$$(x+2)(x-4) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 4$$

$$\text{그런데 } x < -\frac{1}{2} \text{이므로 } -2 \leq x < -\frac{1}{2}$$

(ii) $x \geq -\frac{1}{2}$ 일 때

$$-x^2+7 \geq 2x+1, x^2+2x-6 \leq 0$$

이차방정식 $x^2+2x-6=0$ 의 해가 $x=-1 \pm \sqrt{7}$ 이므로

$$-1-\sqrt{7} \leq x \leq -1+\sqrt{7}$$

$$\text{그런데 } x \geq -\frac{1}{2} \text{이므로 } -\frac{1}{2} \leq x \leq -1+\sqrt{7}$$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 의 해는

$$-2 \leq x \leq -1+\sqrt{7}$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1$ 의 4개이다.

15 조건 (가)에서 $\frac{-2x+1}{3}=t$ 로 놓으면

$$-2x+1=3t, -2x=3t-1$$

$$\therefore x=\frac{-3t+1}{2}$$

즉, 부등식 $f(t) \leq 0$ 의 해가 $\frac{-3t+1}{2} \leq 5$ 또는 $\frac{-3t+1}{2} \geq 8$ 이

므로

$$-3t+1 \leq 10 \text{ 또는 } -3t+1 \geq 16$$

$$-3t \leq 9 \text{ 또는 } -3t \geq 15$$

$$\therefore t \geq -3 \text{ 또는 } t \leq -5$$

따라서 이차함수 $f(t)$ 의 최고차항의 계수를 a 라 하면 $a < 0$ 이고

$$f(t)=a(t+5)(t+3)$$

즉, $f(x)=a(x+5)(x+3)$ 이므로 조건 (나)에서

$$f(x)+4x+11 \leq 0, ax^2+8ax+15a+4x+11 \leq 0$$

$$\therefore ax^2+2(4a+2)x+15a+11 \leq 0 \quad (a < 0)$$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 이차방정식

$$ax^2+2(4a+2)x+15a+11=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4}=(4a+2)^2-a(15a+11) \leq 0$$

$$16a^2+16a+4-15a^2-11a \leq 0$$

$$a^2+5a+4 \leq 0, (a+4)(a+1) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq a \leq -1$$

이때 $f(4)=a \times 9 \times 7=63a$ 이고 $-252 \leq 63a \leq -63$ 이므로

$f(4)$ 의 최댓값은 -63 이다.

답 ①

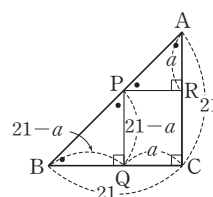
16 오른쪽 그림에서 세 삼각형 ABC,

APR, PBQ는 모두 직각이등변삼각형이다.

$$\overline{QC}=a \text{이므로 } 0 < a < 21$$

$$\overline{PQ}=\overline{BQ}=21-a, \overline{AR}=\overline{PR}=a \text{이}$$

므로



$$\square PQCR = a(21-a), \triangle APR = \frac{1}{2}a^2, \triangle PBQ = \frac{1}{2}(21-a)^2$$

$$\square PQCR > \triangle APR \text{에서}$$

$$a(21-a) > \frac{1}{2}a^2, 2a(21-a) > a^2$$

$$42a - 2a^2 > a^2, 3a^2 - 42a < 0$$

$$a^2 - 14a < 0, a(a-14) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\square PQCR > \triangle PBQ \text{에서}$$

$$a(21-a) > \frac{1}{2}(21-a)^2, 2a(21-a) > (21-a)^2$$

$$42a - 2a^2 > 441 - 42a + a^2, 3a^2 - 84a + 441 < 0$$

$$a^2 - 28a + 147 < 0, (a-7)(a-21) < 0$$

$$\therefore 7 < a < 21 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$7 < a < 14$$

따라서 자연수 a 는 8, 9, 10, ..., 13의 6개이다.

답 ②

17 $|x-3| < 4$ 에서 $-4 < x-3 < 4$

$$\therefore -1 < x < 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또, $x^2 + |x| - 6 \leq 0$ 에서

(i) $x \geq 0$ 일 때

$$x^2 + x - 6 \leq 0, (x+3)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 2$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $0 \leq x \leq 2$

(ii) $x < 0$ 일 때

$$x^2 - x - 6 \leq 0, (x+2)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 3$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $-2 \leq x < 0$

(i), (ii)에서 부등식 $x^2 + |x| - 6 \leq 0$ 의 해는

$$-2 \leq x \leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$-1 < x \leq 2$$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2의 3개이다.

답 ③

18 $|x+2| \geq 6$ 에서 $x+2 \leq -6$ 또는 $x+2 \geq 6$

$$\therefore x \leq -8 \text{ 또는 } x \geq 4$$

즉, 주어진 연립부등식의 해가 존재하려면 $x \leq -8$ 또는 $x \geq 4$ 에서 이차부등식 $x^2 + 2x + k \leq 0$ 의 해가 존재해야 한다.

$$f(x) = x^2 + 2x + k = (x+1)^2 + k-1$$

이라 할 때, $y=f(x)$ 의 그래프의 축은

직선 $x=-1$ 이므로 $x \leq -8$ 또는 $x \geq 4$

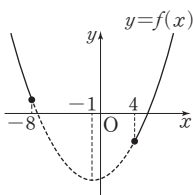
에서 $f(x) \leq 0$ 인 x 가 존재하려면 오른쪽

그림과 같이 $f(4) \leq 0$ 이어야 한다.

$$f(4) = 16 + 8 + k \leq 0 \text{에서}$$

$$k \leq -24$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -24 이다.



답 ①

19 부등식 $g(2x-1) < 0 \leq f(2x-1)$ 에서 $2x-1=t$ 로 놓으면

$$g(t) < 0 \leq f(t), \text{ 즉 } \begin{cases} g(t) < 0 \\ 0 \leq f(t) \end{cases}$$

$g(t) < 0$ 에서

$$t < b \text{ 또는 } t > d \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f(t) \geq 0$ 에서

$$t \leq a \text{ 또는 } t \geq c \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$t \leq a \text{ 또는 } t > d$$

즉, $2x-1 \leq a$ 또는 $2x-1 > d$ 이므로

$$2x \leq a+1 \text{ 또는 } 2x > d+1$$

$$\therefore x \leq \frac{a+1}{2} \text{ 또는 } x > \frac{d+1}{2}$$

답 ④

20 사차방정식 $x^4 + 2(a-10)x^2 + a^2 - 2a - 8 = 0$ 에서 $x^2=t$ 로 놓으면

$$t^2 + 2(a-10)t + a^2 - 2a - 8 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f(a)=2$, 즉 주어진 사차방정식이 서로 다른 두 개의 실근을 가지려면 t 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 양의 실근, 음의 실근을 하나씩 가지거나 양의 실근을 중근으로 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 양의 실근, 음의 실근을 가질 때

두 실근의 부호가 서로 다르므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 실근의 곱}) = a^2 - 2a - 8 < 0$$

$$(a+2)(a-4) < 0 \quad \therefore -2 < a < 4$$

(ii) 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 양의 실근을 중근으로 가질 때

$\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-10)^2 - 1 \times (a^2 - 2a - 8) = 0$$

$$a^2 - 20a + 100 - a^2 + 2a + 8 = 0$$

$$-18a + 108 = 0, 18a = 108 \quad \therefore a = 6$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$t^2 - 8t + 16 = 0, (t-4)^2 = 0 \quad \therefore t = 4$$

즉, 이차방정식 $\textcircled{1}$ 은 양의 실근을 중근으로 가지므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f(a)=2$ 를 만족시키는 실수 a 는

$$-2 < a < 4 \text{ 또는 } a = 6$$

따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 6$ 의 6개이다.

답 ②

21 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 3$ 이므로 $a < 0$

해가 $-2 < x < 3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+2)(x-3) < 0 \quad \therefore x^2 - x - 6 < 0$$

양변에 a 를 곱하면 $ax^2 - ax - 6a > 0$

이 부등식이 $ax^2 + bx + c > 0$ 과 같으므로

$$b = -a, c = -6a$$

이것을 $2cx^2 - 5bx + 2a \leq 0$ 에 대입하면

$$-12ax^2 + 5ax + 2a \leq 0, 12x^2 - 5x - 2 \leq 0$$

$$(4x+1)(3x-2) \leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

따라서 정수 x 의 값은 0이다.

답 ②

- 22 삼각형의 각 변의 길이는 양수이고, 세 변 중 가장 짧은 변의 길이는 $x+1$ 이므로

$$x+1>0 \quad \therefore x>-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+5$ 이므로 삼각형이 만들어질 조건에 의하여

$$(x+1)+(x+3)>x+5 \quad \therefore x>1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

둔각삼각형이 될 조건에 의하여

$$(x+5)^2>(x+1)^2+(x+3)^2, x^2-2x-15<0$$

$$(x+3)(x-5)<0 \quad \therefore -3<x<5 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 의 공통부분을 구하면 $1<x<5$

따라서 정수 x 는 2, 3, 4의 3개이다.

답 ②

- 23 길의 폭이 2 m 이상이므로

$$\sqrt{3}x \geq 2 \quad \therefore x \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편, 오른쪽 그림의 사다리꼴 ABCD에서 정육각형의 한 내각의 크기는 120° 이므로 점 B에서 $\overline{AD}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle HAB=60^\circ$ 이다.

즉, 직각삼각형 ABH에서 $\overline{AH}=x$ m이고, $\overline{AD}=(2x+7)$ m, $\overline{BC}=7$ m이므로 길의 넓이는

$$6\Box ABCD = 6 \times \left[\frac{1}{2} \times \{(2x+7)+7\} \times \sqrt{3}x \right] \\ = 6\sqrt{3}x(x+7) \text{ (m}^2\text{)} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

길의 넓이가 $264\sqrt{3}$ m² 이하이므로

$$6\sqrt{3}x(x+7) \leq 264\sqrt{3}, x(x+7) \leq 44$$

$$x^2+7x-44 \leq 0, (x+11)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -11 \leq x \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{의 공통부분을 구하면 } \frac{2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

따라서 자연수 x 는 2, 3, 4이므로 모든 자연수 x 의 값의 합은

$$2+3+4=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

답 9

채점기준	배점
① 길의 폭에 대한 조건을 이용하여 일차부등식을 세우고 x 의 값의 범위 구하기	1
② 길의 넓이를 x 에 대한 이차식으로 나타내기	3
③ 이차부등식을 세우고 x 의 값의 범위 구하기	2
④ ①, ③의 공통부분 구하기	1
⑤ 모든 자연수 x 의 값의 합 구하기	1

- 24 $|x+2|<5$ 에서 $-5<x+2<5$

$$\therefore -7<x<3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2+(-a+1)x-a \geq 0 \text{에서}$$

$$(x-a)(x+1) \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

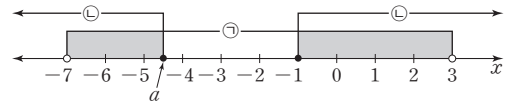
(i) $a<-1$ 일 때

$$\textcircled{2} \text{에서 } x \leq a \text{ 또는 } x \geq -1$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 6개이어야 하고,

$-1 \leq x < 3$ 인 정수 x 가 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이므로 다음 그림

과 같이 $-7 < x \leq a$ 인 정수 x 가 $-6, -5$ 의 2개이어야 한다.



$$\therefore -5 \leq a < -4$$

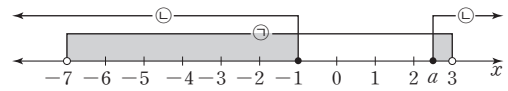
(ii) $a=-1$ 일 때

$\textcircled{2}$ 에서 $x^2+2x+1 \geq 0, (x+1)^2 \geq 0 \quad \therefore x$ 는 모든 실수
따라서 주어진 연립부등식의 해는 $-7 < x < 3$ 이고, 정수 x 는
 $-6, -5, -4, \dots, 2$ 의 9개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a>-1$ 일 때

$$\textcircled{2} \text{에서 } x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq a$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 6개이어야 하고,
 $-7 < x \leq -1$ 인 정수 x 가 $-6, -5, -4, \dots, -1$ 의 6개이
므로 다음 그림에서



$$\therefore a > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(i), (ii), (iii)에서 실수 a 의 값의 범위는

$$-5 \leq a < -4 \text{ 또는 } a > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

답 $-5 \leq a < -4$ 또는 $a > 2$

채점기준	배점
① 부등식 $ x+2 <5$ 의 해 구하기	1
② 부등식 $x^2+(-a+1)x-a \geq 0$ 의 좌변을 인수분해하여 나타내기	1
③ $a<-1, a=-1, a>-1$ 일 때 a 의 값의 범위 각각 구하기	5
④ 실수 a 의 값의 범위 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.38~42

- 1 조건 ㉠에서 이차부등식 $P(x)+2x+3 \geq 0$ 의 해가 $0 \leq x \leq 1$ 이므로 이차다항식 $P(x)+2x+3$ 의 최고차항의 계수를 a 라 하면 $a < 0$ 이고

$$P(x)+2x+3=ax(x-1)$$

$$\therefore P(x)=ax(x-1)-2x-3$$

조건 ㉡에서 이차방정식 $ax(x-1)-2x-3=-3x-2$, 즉

$$ax^2+(-a+1)x-1=0 \text{이 중근을 가지므로 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$D=(-a+1)^2-4 \times a \times (-1)=0$$

$$a^2-2a+1+4a=0, a^2+2a+1=0$$

$$(a+1)^2=0 \quad \therefore a=-1$$

따라서 $P(x)=-x(x-1)-2x-3=-x^2-x-3$ 이므로

$$P(-1)=-1+1-3=-3 \quad \text{답 ①}$$

- 2 조건 ㉠에서 이차부등식 $P(x)-2x+8 \leq 0$ 의 해가 $x \leq -3$ 또는 $x \geq 5$ 이므로 이차다항식 $P(x)-2x+8$ 의 최고차항의 계수를 a 라 하면 $a < 0$ 이고

$$P(x)-2x+8=a(x+3)(x-5)$$

$$\therefore P(x) = a(x+3)(x-5) + 2x - 8 \quad \dots\dots ㉑$$

$$\text{조건 (나)에서 } -P(-1) + 2 = 0$$

$$\therefore P(-1) = 2$$

㉑에 $x = -1$ 을 대입하면

$$P(-1) = a \times 2 \times (-6) - 2 - 8 = 2$$

$$-12a = 12 \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore P(x) = -(x+3)(x-5) + 2x - 8$$

$$= -x^2 + 4x + 7$$

$$P(x) = 2x + k \text{에서 } -x^2 + 4x + 7 = 2x + k$$

$$\therefore x^2 - 2x + k - 7 = 0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \times (k - 7) = 0$$

$$1 - k + 7 = 0 \quad \therefore k = 8$$

답 8

3 $|x-5| < 1$ 에서 $-1 < x-5 < 1$

$$\therefore 4 < x < 6 \quad \dots\dots ㉑$$

$$x^2 - 4ax + 3a^2 > 0 \text{에서 } (x-a)(x-3a) > 0$$

$$\therefore x < a \text{ 또는 } x > 3a \quad (\because a \text{는 자연수}) \quad \dots\dots ㉒$$

주어진 연립부등식이 해를

갖지 않아야 하므로 오른

쪽 그림에서

$$a \leq 4, 3a \geq 6$$

$$a \leq 4, a \geq 2 \quad \therefore 2 \leq a \leq 4$$

따라서 자연수 a 는 2, 3, 4의 3개이다.

답 ①

4 $|x+2| \geq 4$ 에서 $x+2 \leq -4$ 또는 $x+2 \geq 4$

$$\therefore x \leq -6 \text{ 또는 } x \geq 2 \quad \dots\dots ㉑$$

$$x^2 - (2a+3)x + a^2 + 3a \leq 0 \text{에서}$$

$$x^2 - (2a+3)x + a(a+3) \leq 0, (x-a)\{x-(a+3)\} \leq 0$$

$$\therefore a \leq x \leq a+3 \quad \dots\dots ㉒$$

주어진 연립부등식이 해를

갖지 않아야 하므로 오른

쪽 그림에서

$$-6 < a, a+3 < 2$$

$$a > -6, a < -1$$

$$\therefore -6 < a < -1$$

따라서 정수 a 는 -5, -4, -3, -2의 4개이다.

답 ②

5 $x^2 + 3x - 10 < 0$ 에서 $(x+5)(x-2) < 0$

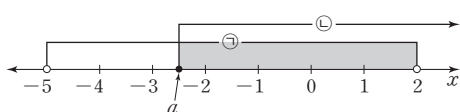
$$\therefore -5 < x < 2 \quad \dots\dots ㉑$$

$$ax \geq a^2 \quad \dots\dots ㉒$$

(i) $a > 0$ 일 때

$$㉒ \text{에서 } x \geq a$$

연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 4개이므로 다음 그림에서



$$-3 < a \leq -2$$

그런데 $a > 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 0$ 일 때

㉒에서 $0 \geq 0$ 이므로 ㉒은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

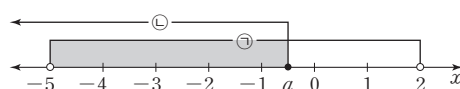
따라서 연립부등식의 해는 $-5 < x < 2$ 이고, 정수 x 는 -4,

-3, -2, -1, 0, 1의 6개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a < 0$ 일 때

$$㉒ \text{에서 } x \leq a$$

연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 4개이므로 다음 그림에서



$$-1 \leq a < 0$$

(i), (iii), (iii)에서 $-1 \leq a < 0$

따라서 정수 a 는 -1이다.

답 ②

6 $x^2 - 2x - 8 \leq 0$ 에서 $(x+2)(x-4) \leq 0$

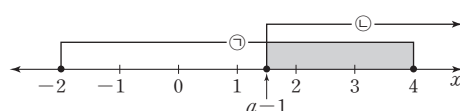
$$\therefore -2 \leq x \leq 4 \quad \dots\dots ㉑$$

$$(a-1)x \geq (a-1)^2 \quad \dots\dots ㉒$$

(i) $a-1 > 0$, 즉 $a > 1$ 일 때

$$㉒ \text{에서 } x \geq a-1$$

연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 3개이므로 다음 그림에서



$$1 < a-1 \leq 2$$

$$\therefore 2 < a \leq 3$$

(ii) $a-1 = 0$, 즉 $a = 1$ 일 때

㉒에서 $0 \geq 0$ 이므로 ㉒은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

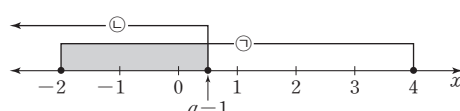
따라서 연립부등식의 해는 $-2 \leq x \leq 4$ 이고, 정수 x 는 -2,

-1, 0, ..., 4의 7개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a-1 < 0$, 즉 $a < 1$ 일 때

$$㉒ \text{에서 } x \leq a-1$$

연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 3개이므로 다음 그림에서



$$0 \leq a-1 < 1$$

$$\therefore 1 \leq a < 2$$

그런데 $a < 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $2 < a \leq 3$

따라서 정수 a 는 3이다.

답 ⑤

7 직선 $y = x + k$ 가 이차함수 $y = x^2 - 2x + 4$ 의 그래프와 만나야 하

므로 이차방정식 $x + k = x^2 - 2x + 4$, 즉 $x^2 - 3x + 4 - k = 0$ 의

판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (4 - k) \geq 0$$

$$9 - 16 + 4k \geq 0, 4k \geq 7$$

$$\therefore k \geq \frac{7}{4} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또, 직선 $y=x+k$ 가 이차함수 $y=x^2-5x+15$ 의 그래프와 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $x+k=x^2-5x+15$, 즉 $x^2-6x+15-k=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-3)^2-1 \times (15-k) < 0$$

$$9-15+k < 0 \quad \therefore k < 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분을 구하면

$$\frac{7}{4} \leq k < 6$$

따라서 정수 k 는 2, 3, 4, 5의 4개이다. [답] ②

- 8 직선 $y=x+2$ 가 이차함수 $y=x^2-3x+k$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 이차방정식 $x+2=x^2-3x+k$, 즉 $x^2-4x+k-2=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-1 \times (k-2) > 0$$

$$4-k+2 > 0 \quad \therefore k < 6 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

또, 직선 $y=x+2$ 가 이차함수 $y=x^2-x+k+1$ 의 그래프와 만나지 않아야 하므로 이차방정식 $x+2=x^2-x+k+1$, 즉 $x^2-2x+k-1=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-1 \times (k-1) < 0$$

$$1-k+1 < 0 \quad \therefore k > 2 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}$, $\textcircled{10}$ 의 공통부분을 구하면

$$2 < k < 6$$

따라서 정수 k 는 3, 4, 5의 3개이다. [답] ①

- 9 $A(0, k^2+4)$ 이고, 점 B는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k^2+4$ 의 교점이므로

$$-x^2+2kx+k^2+4=k^2+4 \text{에서 } -x^2+2kx=0$$

$$x^2-2kx=0, x(x-2k)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2k$$

즉, $B(2k, k^2+4)$, $C(2k, 0)$ 이고

$$\overline{OA}=k^2+4, \overline{OC}=2k$$

따라서 사각형 OCBA의 둘레의 길이는

$$g(k)=2(\overline{OA}+\overline{OC})$$

$$=2\{(k^2+4)+2k\}$$

$$=2k^2+4k+8$$

$$14 \leq g(k) \leq 78 \text{에서 } 14 \leq 2k^2+4k+8 \leq 78$$

$$\therefore 7 \leq k^2+2k+4 \leq 39$$

$$\text{즉, } \begin{cases} 7 \leq k^2+2k+4 \\ k^2+2k+4 \leq 39 \end{cases} \text{이므로}$$

$$7 \leq k^2+2k+4 \text{에서 } k^2+2k-3 \geq 0$$

$$(k+3)(k-1) \geq 0 \quad \therefore k \leq -3 \text{ 또는 } k \geq 1$$

$$\text{그런데 } k > 0 \text{이므로 } k \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

$$k^2+2k+4 \leq 39 \text{에서 } k^2+2k-35 \leq 0$$

$$(k+7)(k-5) \leq 0 \quad \therefore -7 \leq k \leq 5$$

$$\text{그런데 } k > 0 \text{이므로 } 0 < k \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

$\textcircled{11}$, $\textcircled{12}$ 의 공통부분을 구하면

$$1 \leq k \leq 5$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, 4, 5이므로 모든 자연수 k 의 값의 합은

$$1+2+3+4+5=15$$

[답] 15

다른풀이 $f(x)=-x^2+2kx+k^2+4=-(x-k)^2+2k^2+4$

이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축은 직선 $x=k$ 이고, 점 C는 원점과 직선 $x=k$ 에 대하여 대칭이므로

$$C(2k, 0), \text{ 즉 } \overline{OC}=2k$$

- 10 $A(0, 2k^2+1)$ 이고, 점 B는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2k^2+1$ 의 교점이므로

$$-\frac{1}{2}x^2+2kx+2k^2+1=2k^2+1 \text{에서}$$

$$-\frac{1}{2}x^2+2kx=0, x^2-4kx=0$$

$$x(x-4k)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=4k$$

즉, $B(4k, 2k^2+1)$ 이고

$$\overline{OA}=2k^2+1, \overline{AB}=4k$$

또, 점 C, 점 D는 각각 점 A, 점 B와 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\overline{AC}=2\overline{OA}=2(2k^2+1)=4k^2+2$$

따라서 사각형 ACDB의 둘레의 길이는

$$h(k)=2\overline{AC}+2\overline{AB}$$

$$=2(4k^2+2)+2 \times 4k$$

$$=8k^2+8k+4$$

$$164 \leq h(k) \leq 340 \text{에서 } 164 \leq 8k^2+8k+4 \leq 340$$

$$\therefore 41 \leq 2k^2+2k+1 \leq 85$$

$$\text{즉, } \begin{cases} 41 \leq 2k^2+2k+1 \\ 2k^2+2k+1 \leq 85 \end{cases} \text{이므로}$$

$$41 \leq 2k^2+2k+1 \text{에서 } 2k^2+2k-40 \geq 0$$

$$k^2+k-20 \geq 0, (k+5)(k-4) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -5 \text{ 또는 } k \geq 4$$

$$\text{그런데 } k \text{는 자연수이므로 } k \geq 4 \quad \dots\dots \textcircled{13}$$

$$2k^2+2k+1 \leq 85 \text{에서 } 2k^2+2k-84 \leq 0$$

$$k^2+k-42 \leq 0, (k+7)(k-6) \leq 0$$

$$\therefore -7 \leq k \leq 6$$

$$\text{그런데 } k \text{는 자연수이므로 } 4 \leq k \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{14}$$

$\textcircled{13}$, $\textcircled{14}$ 의 공통부분을 구하면

$$4 \leq k \leq 6$$

따라서 자연수 k 는 4, 5, 6이므로 모든 자연수 k 의 값의 합은

$$4+5+6=15$$

[답] 15

III 경우의 수

1 순열

교과서 예제

p.45

01 $5+3=8$

답 8

02 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 3이 되는 경우는

(1, 2), (2, 1)의 2가지

(ii) 눈의 수의 합이 6이 되는 경우는

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$2+5=7$

답 7

03 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 5가 되는 경우는

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

(ii) 눈의 수의 합이 10이 되는 경우는

(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+3=7$

답 7

04 50 이하의 7의 배수는 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49의 7개

50 이하의 8의 배수는 8, 16, 24, 32, 40, 48의 6개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$7+6=13$

답 13

05 $3 \times 4 = 12$

답 12

06 첫 번째에 나오는 눈의 수가 3의 배수인 경우는 3, 6의 2가지

두 번째에 나오는 눈의 수가 4 이하인 경우는 1, 2, 3, 4의 4가지

따라서 구하는 경우의 수는

$2 \times 4 = 8$

답 8

07 십의 자리에 올 수 있는 수는 2, 4, 6, 8의 4개

일의 자리에 올 수 있는 수는 1, 3, 9의 3개

따라서 구하는 두 자리 자연수의 개수는

$4 \times 3 = 12$

답 12

08 $A \rightarrow B$ 로 가는 방법은 2가지 $B \rightarrow C$ 로 가는 방법은 3가지

따라서 구하는 경우의 수는

$2 \times 3 = 6$

답 6

09 (1) ${}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

(4) ${}_6P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

답 (1) 120 (2) 7 (3) 1 (4) 720

10 (1) ${}_nP_2 = 56$ 에서

$n(n-1) = 8 \times 7 \quad \therefore n = 8$

(2) ${}_5P_r = 60 = 5 \times 4 \times 3$ 이므로 $r = 3$

(3) ${}_nP_n = 24$ 에서 $n! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad \therefore n = 4$

(4) $\frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!} = {}_7P_4 \quad \therefore r = 4$

답 (1) 8 (2) 3 (3) 4 (4) 4

11 (1) ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

(2) ${}_7P_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

답 (1) 60 (2) 840

12 (1) B와 C를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

이때 각 경우에 대하여 B와 C의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \times 2 = 12$

(2) A와 D를 양 끝에 세우는 경우의 수는 $2! = 2$ 이때 각 경우에 대하여 나머지 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$2 \times 2 = 4$

답 (1) 12 (2) 4

기출 Best | 1회

p.46~49

01 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 4가 되는 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

(ii) 눈의 수의 합이 8이 되는 경우는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지

(iii) 눈의 수의 합이 12가 되는 경우는

(6, 6)의 1가지

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$3+5+1=9$

답 ⑤

02 $x+3y+4z=24$ 에서(i) $z=1$ 일 때, $x+3y=20$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

(17, 1), (14, 2), (11, 3), (8, 4), (5, 5), (2, 6)의 6개

(ii) $z=2$ 일 때, $x+3y=16$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

(13, 1), (10, 2), (7, 3), (4, 4), (1, 5)의 5개

(iii) $z=3$ 일 때, $x+3y=12$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

(9, 1), (6, 2), (3, 3)의 3개

- (iv) $z=4$ 일 때, $x+3y=8$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(5, 1), (2, 2)$ 의 2개
 (v) $z=5$ 일 때, $x+3y=4$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(1, 1)$ 의 1개
 (i)~(v)에서 구하는 순서쌍의 개수는
 $6+5+3+2+1=17$

답 ①

03 $x+y \leq 4$ 에서

- (i) $x=1$ 일 때, $1+y \leq 4$, 즉 $y \leq 3$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$ 의 3개
 (ii) $x=2$ 일 때, $2+y \leq 4$, 즉 $y \leq 2$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(2, 1), (2, 2)$ 의 2개
 (iii) $x=3$ 일 때, $3+y \leq 4$, 즉 $y \leq 1$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(3, 1)$ 의 1개
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
 $3+2+1=6$

답 ⑤

다른풀이 x, y 가 자연수이므로 $x+y \leq 4$ 를 만족시키는 경우는

- $x+y=2, x+y=3, x+y=4$
 (i) $x+y=2$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는 $(1, 1)$ 의 1개
 (ii) $x+y=3$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는 $(1, 2), (2, 1)$ 의 2개
 (iii) $x+y=4$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 의
 3개
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
 $1+2+3=6$

04 500원, 100원, 50원짜리 동전을 각각 x 개, y 개, z 개 사용하여
 700원을 지불한다고 하면

- $500x+100y+50z=700$
 $\therefore 10x+2y+z=14$ (단, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 6, 0 \leq z \leq 4$ 인 정수)
 (i) $x=0$ 일 때, $2y+z=14$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는
 $(6, 2), (5, 4)$ 의 2개
 (ii) $x=1$ 일 때, $2y+z=4$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는
 $(2, 0), (1, 2), (0, 4)$ 의 3개
 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $2+3=5$

답 ②

05 $(a+b+c+d+e)(x+y+z)(u+v)$ 를 전개할 때,

- a, b, c, d, e 에 곱하는 항이 각각 x, y, z 의 3개,
 u, v 의 2개이므로 항의 개수는 $5 \times 3 \times 2=30$

답 ⑤

06 두 수의 합이 짝수이면 두 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이
 여야 한다.

- 주사위의 눈의 수 중 홀수는 1, 3, 5의 3개, 짝수는 2, 4, 6의 3개
 이므로
 (i) 두 수가 모두 짝수인 경우의 수
 $3 \times 3=9$

- (ii) 두 수가 모두 홀수인 경우의 수
 $3 \times 3=9$

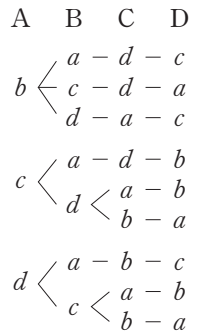
- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $9+9=18$

답 ④

- 07 $6^4 \times 7^3 = 2^4 \times 3^4 \times 7^3$ 의 양의 약수의 개수는
 $(4+1) \times (4+1) \times (3+1)=100 \quad \therefore a=100$
 $8^3 \times 5^2 = (2^3)^3 \times 5^2 = 2^9 \times 5^2$ 의 양의 약수의 개수는
 $(9+1) \times (2+1)=30 \quad \therefore b=30$
 $\therefore a+b=100+30=130$

답 ⑤

- 08 4명의 학생을 A, B, C, D라 하고 A, B, C, D가 가져온 음식을 각각 a, b, c, d 라
 할 때, 학생 A가 음식 b, c, d 를 먹는 경
 우를 수형도로 나타내면 오른쪽 그림과 같
 다.
 따라서 구하는 경우의 수는 9이다.



답 ②

09 (i) 지불하는 경우의 수

- 500원짜리 동전으로 지불하는 방법은
 0개, 1개의 2가지
 100원짜리 동전으로 지불하는 방법은
 0개, 1개, 2개의 3가지
 50원짜리 동전으로 지불하는 방법은
 0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지
 이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는
 경우의 수는 $2 \times 3 \times 5 - 1 = 29 \quad \therefore a=29$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

- 50원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전
 2개로 지불할 수 있는 금액이 서로 같으므로 100원짜리 동전
 2개를 50원짜리 동전 4개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수
 는 500원짜리 동전 1개, 50원짜리 동전 8개로 지불할 수 있
 는 금액의 수와 같다.
 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
 0원, 500원의 2가지
 50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
 0원, 50원, 100원, ..., 400원의 9가지
 이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는
 금액의 수는 $2 \times 9 - 1 = 17 \quad \therefore b=17$

- (i), (ii)에서 $a-b=29-17=12$

답 ③

- 10 (i) 집 $\rightarrow$ 도서관 $\rightarrow$ 학교로 가는 경우의 수는
 $3 \times 2=6$

(ii) 집 → 편의점 → 학교로 가는 경우의 수는

$$2 \times 4 = 8$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 8 = 14$$

답 ④

11 B에 칠할 수 있는 색은 5가지

C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 4가지

D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 3가지

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 4가지

따라서 구하는 경우의 수는

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 4 = 720$$

답 ⑤

12 ${}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

답 ④

13 ${}_{n+1}P_3 = 8, {}_nP_2$ 에서

$$n(n+1)(n-1) = 8n(n-1)$$

${}_{n+1}P_3$ 에서 $n \geq 2$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$n+1=8 \quad \therefore n=7$$

답 ③

14 파란색 화분 3개를 한 묶음으로 생각하여 4개의 화분을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

파란색 화분 묶음 안에서 파란색 화분 3개가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 6 = 144$$

답 ⑤

15 여학생끼리 이웃하지 않게 서는 경우는 다음과 같다.

$$\vee \boxed{\text{남}} \vee \boxed{\text{남}} \vee \boxed{\text{남}} \vee \boxed{\text{남}} \vee$$

남학생 4명이 일렬로 서는 경우의 수는 $4! = 24$

남학생 4명의 사이사이와 양 끝 5개의 자리 중 3개의 자리에 여학생 3명이 서는 경우의 수는 ${}_5P_3 = 60$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 60 = 1440$$

답 ⑤

16 (i) 남학생 3명 중 2명을 양 끝에 세우는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

나머지 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

$$\therefore a = 6 \times 6 = 36$$

(ii) 여학생 2명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$

여학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

$$\therefore b = 24 \times 2 = 48$$

(i), (ii)에서 $a+b=36+48=84$

답 ⑤

17 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$7! = 5040$$

양 끝에 자음이 오도록 나열하는 경우의 수는 자음 b, s, c, r 4개 중 2개를 양 끝에 나열하고, 나머지 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$${}_4P_2 \times 5! = 12 \times 120 = 1440$$

따라서 적어도 한쪽 끝에 모음이 오도록 나열하는 경우의 수는

$$5040 - 1440 = 3600$$

답 ④

18 자연수가 짝수이면 일의 자리의 숫자가 2 또는 4이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수

2를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4P_2 = 12$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 4인 짝수의 개수

4를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4P_2 = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$$12 + 12 = 24$$

답 ②

19 자연수가 4의 배수이면 끝의 두 자리의 수가 4의 배수이어야 한다.

(i) $\square\square\square 04$, $\square\square\square 20$, $\square\square\square 40$ 꼴의 자연수의 개수

각각의 경우에 나머지 3개의 숫자를 만의 자리, 천의 자리, 백의 자리에 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$ 이므로

$$3 \times 6 = 18$$

(ii) $\square\square\square 12$, $\square\square\square 24$, $\square\square\square 32$ 꼴의 자연수의 개수

각각의 경우에 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 십의 자리, 일의 자리에 나열한 숫자를 제외한 2개, 나머지 2개의 숫자를 천의 자리, 백의 자리에 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$ 이므로

$$3 \times (2 \times 2) = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 4의 배수의 개수는

$$18 + 12 = 30$$

답 ⑤

20 A $\square\square\square\square\square$ 꼴의 개수는 $5! = 120$

B $\square\square\square\square\square$ 꼴의 개수는 $5! = 120$

CA $\square\square\square\square$ 꼴의 개수는 $4! = 24$

CBA $\square\square\square$ 꼴의 개수는 $3! = 6$

CBD $\square\square\square$ 꼴의 개수는 $3! = 6$

A $\square\square\square\square\square$ 꼴부터 CBD $\square\square\square$ 꼴까지의 개수는

$$120 + 120 + 24 + 6 + 6 = 276$$

따라서 277번째에 오는 것은 CBEADF, 278번째에 오는 것은 CBEAFD이다.

답 ④

01 두 자리 자연수 중

- (i) 각 자리의 숫자의 합이 5인 수는
14, 23, 32, 41, 50의 5개
- (ii) 각 자리의 숫자의 합이 10인 수는
19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91의 9개
- (i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는
 $5+9=14$

답 ④

02 $x+2y+3z=13$ 에서

- (i) $z=0$ 일 때, $x+2y=13$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
(13, 0), (11, 1), (9, 2), (7, 3), (5, 4), (3, 5), (1, 6)
의 7개
- (ii) $z=1$ 일 때, $x+2y=10$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
(10, 0), (8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4), (0, 5)의 6개
- (iii) $z=2$ 일 때, $x+2y=7$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
(7, 0), (5, 1), (3, 2), (1, 3)의 4개
- (iv) $z=3$ 일 때, $x+2y=4$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
(4, 0), (2, 1), (0, 2)의 3개
- (v) $z=4$ 일 때, $x+2y=1$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는 (1, 0)의 1개
- (i)~(v)에서 구하는 순서쌍의 개수는
 $7+6+4+3+1=21$

답 ④

03 $3x+2y \leq 10$ 에서

- (i) $x=1$ 일 때, $3+2y \leq 10$, 즉 $y \leq \frac{7}{2}$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
(1, 1), (1, 2), (1, 3)의 3개
- (ii) $x=2$ 일 때, $6+2y \leq 10$, 즉 $y \leq 2$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
(2, 1), (2, 2)의 2개
- (i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
 $3+2=5$

답 ①

04 500원, 100원, 50원짜리 동전을 각각 x 개, y 개, z 개 사용하여
1050원을 지불한다고 하면

- $$500x+100y+50z=1050$$
- $$\therefore 10x+2y+z=21 \text{ (단, } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 11, 0 \leq z \leq 8 \text{인 정수)}$$
- (i) $x=0$ 일 때, $2y+z=21$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는
(10, 1), (9, 3), (8, 5), (7, 7)의 4개
- (ii) $x=1$ 일 때, $2y+z=11$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는
(5, 1), (4, 3), (3, 5), (2, 7)의 4개
- (iii) $x=2$ 일 때, $2y+z=1$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는
(0, 1)의 1개
- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
 $4+4+1=9$

답 ②

- 05 백의 자리의 숫자가 될 수 있는 수는 4, 8의 2개
십의 자리의 숫자가 될 수 있는 수는 2, 3, 5, 7의 4개
일의 자리의 숫자가 될 수 있는 수는 0, 2, 4, 6, 8의 5개
따라서 구하는 짝수의 개수는

$$2 \times 4 \times 5 = 40$$

답 ⑤

- 06 $a+bc$ 의 값이 짝수가 되려면 a, bc 가 모두 홀수 또는 모두 짝수
이어야 한다.

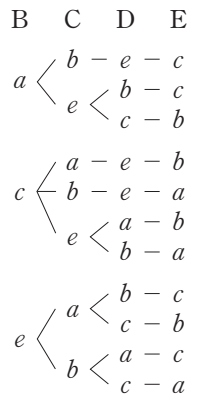
- (i) a 가 홀수, bc 가 홀수일 때
(a, b, c)가 (홀수, 홀수, 홀수)인 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 = 27$
- (ii) a 가 짝수, bc 가 짝수일 때
(a, b, c)가 (짝수, 짝수, 짝수)인 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 = 27$
(a, b, c)가 (짝수, 짝수, 홀수)인 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 = 27$
(a, b, c)가 (짝수, 홀수, 짝수)인 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 = 27$
- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $27+27+27+27=108$

답 ④

- 07 $384=2^7 \times 3$ 의 양의 약수 중에서 짝수는 $2 \times (\text{자연수})$ 의 꼴이다.
즉, 짝수의 개수는 $2^6 \times 3$ 의 약수의 개수와 같으므로
 $(6+1) \times (1+1) = 14$

답 ③

- 08 학생 A, B, C, D, E의 이름표를 각각 a, b, c, d, e 라 할 때, 학생 A가 이름표 d 를
뽑았으므로 나머지 학생들의 이름표를 수
형도로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 11이다.



답 ③

- 09 (i) 지불하는 경우의 수

100원짜리 동전으로 지불하는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

50원짜리 동전으로 지불하는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

10원짜리 동전으로 지불하는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는
경우의 수는 $5 \times 4 \times 3 - 1 = 59$ $\therefore a=59$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 서로 같으므로 100원짜리 동전 4개를 50원짜리 동전 8개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 11개, 10원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, ..., 550원의 12가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는 $12 \times 3 - 1 = 35$ $\therefore b = 35$

(i), (ii)에서 $a - b = 59 - 35 = 24$

답 ⑤

10 (i) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 3 = 6$

(ii) $A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$

(iii) $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$

(iv) $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 3 = 12$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$6 + 4 + 8 + 12 = 30$

답 ④

11 $C \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F$ 의 순서로 색을 칠한다.

(i) A, D에 같은 색을 칠하는 경우의 수

C에 칠할 수 있는 색은 4가지

A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같으므로 1가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 3가지

F에 칠할 수 있는 색은 C, E에 칠한 색을 제외한 2가지이므로

$4 \times 3 \times 1 \times 3 \times 3 \times 2 = 216$

(ii) A, D에 다른 색을 칠하는 경우의 수

C에 칠할 수 있는 색은 4가지

A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 C, A에 칠한 색을 제외한 2가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, D에 칠한 색을 제외한 2가지

E에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 3가지

F에 칠할 수 있는 색은 C, E에 칠한 색을 제외한 2가지이므로

$4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 288$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$216 + 288 = 504$

답 ①

12 ${}_nP_3 = 210$ 에서

$n(n-1)(n-2) = 210 = 7 \times 6 \times 5$

$\therefore n = 7$

답 ②

13 $2 \times {}_nP_4 = 5 \times {}_{n+1}P_3$ 에서

$2n(n-1)(n-2)(n-3) = 5(n+1)n(n-1)$

$2(n-2)(n-3) = 5(n+1)$ ($\because n(n-1) \neq 0$)

$2n^2 - 15n + 7 = 0, (2n-1)(n-7) = 0$

$\therefore n = 7$ ($\because n \geq 4$)

답 ②

14 2세 반 어린이, 3세 반 어린이, 4세 반 어린이를 각각 1명으로 생 각하여 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

2세 반 어린이들끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

3세 반 어린이들끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$

4세 반 어린이들끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \times 2 \times 6 \times 6 = 432$

답 ①

15 의자 3개에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 6개이다.

빈 의자들 사이사이와 양 끝 7개의 자리 중 3개의 자리에 학생 3 명이 앉으면 되므로 구하는 경우의 수는

${}_7P_3 = 210$

답 ②

16 c와 o 사이에 c, o를 제외한 5개의 문자 중에서 3개를 택하여 나 열하는 경우의 수는 ${}_5P_3 = 60$

c, o와 그 사이의 3개의 문자를 한 문자로 생각하여 3개의 문자 를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

c와 o가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$60 \times 6 \times 2 = 720$

답 ⑤

17 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6! = 720$

남학생 3명 중 어느 두 명도 이웃하지 않는 경우의 수는 여학생 3 명을 일렬로 세우고, 여학생 3명의 사이사이 및 양 끝 4개의 자리에 남학생 3명을 세우는 경우의 수이므로

$3! \times {}_4P_3 = 144$

따라서 적어도 두 남학생이 이웃하도록 세우는 경우의 수는

$720 - 144 = 576$

답 ④

18 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택할 때, 합이 3의 배수인 경우는 (1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)의 4가지

각 경우마다 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 $3! = 6$

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$4 \times 6 = 24$

답 ③

19 네 자리 자연수 중

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 짝수의 개수

0을 제외한 나머지 4개의 숫자 중 서로 다른 3개를 택하여 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4P_3=24$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수

0과 2를 제외한 3개의 숫자 1, 3, 4 중에서 천의 자리에 오는 숫자를 택하는 경우의 수는 3

2와 천의 자리에 오는 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 서로 다른 2개를 택하여 백의 자리, 십의 자리에 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$ 이므로

$$3 \times 6=18$$

(iii) 일의 자리의 숫자가 4인 짝수의 개수

(ii)와 같은 방법으로 18

(i), (ii), (iii)에서 구하는 짝수의 개수는

$$24+18+18=60$$

답 ①

20 45로 시작하는 여섯 자리 자연수의 개수는

$$4!=24$$

5로 시작하는 여섯 자리 자연수의 개수는

$$5!=120$$

따라서 450000보다 큰 여섯 자리 자연수의 개수는

$$24+120=144$$

답 ②

변형유형 집중공략

p.54~55

1-1 $540=2^2 \times 3^3 \times 5$

(i) 540의 양의 약수 중에서 $9=3^2$ 의 배수의 개수는 $2^2 \times 3 \times 5$ 의 양의 약수의 개수와 같으므로

$$(2+1) \times (1+1) \times (1+1)=12$$

$$\therefore a=12$$

(ii) 540의 양의 약수 중에서 짝수, 즉 2의 배수의 개수는

$2 \times 3^3 \times 5$ 의 양의 약수의 개수와 같으므로

$$(1+1) \times (3+1) \times (1+1)=16$$

$$\therefore b=16$$

(i), (ii)에서 $b-a=16-12=4$

답 ②

1-2 $252=2^2 \times 3^2 \times 7$, $378=2 \times 3^3 \times 7$ 의 공약수는 최대공약수

$2 \times 3^2 \times 7$ 의 약수이다.

$2 \times 3^2 \times 7$ 의 약수 중 3의 배수의 개수는 $2 \times 3 \times 7$ 의 약수의 개수와 같으므로

$$(1+1) \times (1+1) \times (1+1)=8$$

답 ②

2-1 $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow B$ 의 순서로 색을 칠한다.

(i) C와 E에 같은 색을 칠하는 경우의 수

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색과 같으므로 1가지

D에 칠할 수 있는 색은 C(E)에 칠한 색을 제외한 3가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로

$$4 \times 3 \times 1 \times 3 \times 2=72$$

(ii) C와 E에 다른 색을 칠하는 경우의 수

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 C, E에 칠한 색을 제외한 2가지

B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 2가지이므로

$$4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2=96$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$72+96=168$$

답 168

2-2 $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E$ 의 순서로 색을 칠한다.

(i) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우의 수

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같으므로 1가지

C에 칠할 수 있는 색은 B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지이므로

$$4 \times 3 \times 1 \times 3 \times 3=108$$

(ii) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우의 수

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 2가지

C에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 2가지

E에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지이므로

$$4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3=144$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$108+144=252$$

답 252

서술형 What & How

p.56~59

1 이차방정식 $x^2+2ax+2b=0$ 이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-1 \times 2b < 0, a^2 < 2b \quad \therefore b > \frac{a^2}{2}$$

..... ①

- (i) $a=1$ 일 때, $b > \frac{1}{2}$ 이므로 가능한 b 의 값은
1, 2, 3, ..., 6의 6개
- (ii) $a=2$ 일 때, $b > 2$ 이므로 가능한 b 의 값은 3, 4, 5, 6의 4개
- (iii) $a=3$ 일 때, $b > \frac{9}{2}$ 이므로 가능한 b 의 값은 5, 6의 2개
- (iv) $a=4, 5, 6$ 일 때, 각각 $b > 8$, $b > \frac{25}{2}$, $b > 18$ 이므로 가능한
 b 의 값은 없다. ②
- (i) ~ (iv)에서 구하는 경우의 수는
 $6 + 4 + 2 = 12$ ③

답 12

- 2 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-a)^2 - 4 \times 1 \times b \geq 0, a^2 \geq 4b \quad \therefore b \leq \frac{a^2}{4} \quad \dots\dots ①$$

- (i) $a=1$ 일 때, $b \leq \frac{1}{4}$ 이므로 가능한 b 의 값은 없다.
- (ii) $a=2$ 일 때, $b \leq 1$ 이므로 가능한 b 의 값은 1의 1개
- (iii) $a=3$ 일 때, $b \leq \frac{9}{4}$ 이므로 가능한 b 의 값은 1, 2의 2개
- (iv) $a=4$ 일 때, $b \leq 4$ 이므로 가능한 b 의 값은 1, 2, 3, 4의 4개
- (v) $a=5$ 일 때, $b \leq \frac{25}{4}$ 이므로 가능한 b 의 값은
1, 2, 3, ..., 6의 6개
- (vi) $a=6$ 일 때, $b \leq 9$ 이므로 가능한 b 의 값은
1, 2, 3, ..., 6의 6개 ②
- (i) ~ (vi)에서 구하는 경우의 수는
 $1 + 2 + 4 + 6 + 6 = 19$ ③

답 19

채점기준	배점
① 주어진 이차방정식이 실근을 가질 조건 설명하기	2
② a 의 값에 따라 경우를 나누어 가능한 b 의 값의 개수 구하기	4
③ 주어진 이차방정식이 실근을 가지는 경우의 수 구하기	1

- 3 모음 O, A, E가 이웃하지 않도록 나열하는 경우는 다음과 같다.

$$\vee \boxed{C} \vee \boxed{M} \vee \boxed{P} \vee \boxed{R} \vee$$

- C, M, P, R를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$ ①
- 자음 4개의 사이사이와 양 끝 5개의 자리 중 3개의 자리에 O, A, E를 나열하는 경우의 수는
 ${}_5P_3 = 60$ ②
- 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 60 = 1440$ ③

답 1440

- 4 1반 학생 2명은 이웃하고, 2반 학생끼리는 이웃하지 않도록 세우는 경우는 다음과 같다.

$$\vee \boxed{1반, 1반} \vee \boxed{3반} \vee \boxed{3반} \vee \boxed{3반} \vee$$

- 1반 학생 2명을 한 사람으로 생각하여 2반 학생을 제외한 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$ ①
- 1반 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$ ②
- 일렬로 세운 4명의 사이사이와 양 끝 5개의 자리 중 2개의 자리에 2반 학생 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$ ③
- 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 2 \times 20 = 960$ ④

답 960

채점기준	배점
① 1반 학생 2명을 한 사람으로 생각하여 3반 학생까지 총 4명을 일렬로 세우는 경우의 수 구하기	2
② 1반 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수 구하기	2
③ 4명의 사이사이와 양 끝 5개의 자리 중 2개의 자리에 2반 학생 2명을 세우는 경우의 수 구하기	2
④ 1반 학생끼리는 이웃하고, 2반 학생끼리는 이웃하지 않도록 세우는 경우의 수 구하기	1

- 5 자연수가 3의 배수이려면 각 자리의 수의 합이 3의 배수이어야 한다. ①

- 0, 1, 3, 5, 7 중에서 서로 다른 3개를 택할 때, 합이 3의 배수인 경우는
(0, 1, 5), (0, 5, 7), (1, 3, 5), (3, 5, 7) ②
- (i) 0, 1, 5로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
 $2 \times 2 \times 1 = 4$
- (ii) 0, 5, 7로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
 $2 \times 2 \times 1 = 4$
- (iii) 1, 3, 5로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
 $3! = 6$
- (iv) 3, 5, 7로 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는
 $3! = 6$ ③
- (i) ~ (iv)에서 세 자리 자연수 중 3의 배수의 개수는
 $4 + 4 + 6 + 6 = 20$ ④

답 20

- 6 자연수가 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다. ①

- (i) $\square\square\square 0$ 꼴의 자연수의 개수
천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 1, 2, 3, 4, 5 중 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
 ${}_5P_3 = 60$ ②
- (ii) $\square\square\square 5$ 꼴의 자연수의 개수
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5를 제외한 4개
백의 자리, 십의 자리에 천의 자리에 오는 숫자와 5를 제외한 4개의 숫자 중 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는
 ${}_4P_2 = 12$ 이므로
 $4 \times 12 = 48$ ③
- (i), (ii)에서 네 자리 자연수 중 5의 배수의 개수는
 $60 + 48 = 108$ ④

답 108

채점기준	배점
① 자연수가 5의 배수가 될 조건 설명하기	2
② 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수 구하기	2
③ 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수 구하기	2
④ 네 자리 자연수 중 5의 배수의 개수 구하기	1

- 7 $a□□□□$ 꼴의 개수는 $4! = 24$
 $b□□□□$ 꼴의 개수는 $4! = 24$
 $c□□□□$ 꼴의 개수는 $4! = 24$
 $da□□□$ 꼴의 개수는 $3! = 6$
 $dba□□$ 꼴의 개수는 $2! = 2$
 $dbc□□$ 꼴의 개수는 $2! = 2$ ①
 $a□□□□$ 꼴부터 $dbc□□$ 꼴까지의 개수는
 $24 + 24 + 24 + 6 + 2 + 2 = 82$ ②
따라서 $dbeac$ 는 83번째에 온다. ③
답 83번째

- 8 1, 2, 3, 4로 시작하는 네 자리 자연수의 개수는 각각
 ${}_6P_3 = 120$
51, 52, 53, 54로 시작하는 네 자리 자연수의 개수는 각각
 ${}_5P_2 = 20$
561, 562로 시작하는 네 자리 자연수의 개수는 각각
 ${}_4P_1 = 4$ ①
1234에서 5627까지의 개수는
 $120 \times 4 + 20 \times 4 + 4 \times 2 = 568$ ②
따라서 5631은 569번째, 5632는 570번째에 오는 수이다.
..... ③
답 570번째

채점기준	배점
① 1, 2, 3, 4로 시작하는 네 자리 자연수부터 562로 시작하는 네 자리 자연수의 개수까지 각각 구하기	5
② 1234에서 5627까지의 네 자리 자연수의 개수 구하기	1
③ 5632가 몇 번째에 오는 수인지 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.60~63

- 01 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면
(i) 눈의 수의 차가 1인 경우는
 $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6),$
 $(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$
의 10가지
(ii) 눈의 수의 차가 0인 경우는
 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$
의 6가지
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $10 + 6 = 16$

답 ②

- 02 양 끝 2개의 자리에 2, 4를 나열하는 경우의 수는
 $2! = 2$
가운데 3개의 자리에 1, 3, 5를 나열하는 경우의 수는
 $3! = 6$
따라서 구하는 경우의 수는
 $2 \times 6 = 12$

답 ③

- 03 운전석에 앉을 수 있는 어른은 2명
남은 4개의 좌석에 4명이 앉는 경우의 수는
 $4! = 24$
따라서 구하는 경우의 수는
 $2 \times 24 = 48$

답 ④

- 04 (i) $A \rightarrow C \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는
 $2 \times 3 = 6$
(ii) $A \rightarrow D \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는
 $3 \times 2 = 6$
(iii) $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는
 $2 \times 1 \times 2 = 4$
(iv) $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는
 $3 \times 1 \times 3 = 9$
(i) ~ (iv)에서 구하는 경우의 수는
 $6 + 6 + 4 + 9 = 25$

답 ③

- 05 홀수 x, y 에 대하여 $x+y$ 는 짝수이므로 $x+y \leq 7$ 을 만족시키는 경우는
 $x+y=2$ 또는 $x+y=4$ 또는 $x+y=6$
(i) $x+y=2$ 일 때
순서쌍 (x, y) 는 $(1, 1)$ 의 1개
(ii) $x+y=4$ 일 때
순서쌍 (x, y) 는 $(1, 3), (3, 1)$ 의 2개
(iii) $x+y=6$ 일 때
순서쌍 (x, y) 는 $(1, 5), (3, 3), (5, 1)$ 의 3개
(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
 $1 + 2 + 3 = 6$

답 ②

- 06 (i) 지불하는 경우의 수
1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은
0장, 1장, 2장, ..., 7장의 8가지
5000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은
0장, 1장, 2장, 3장의 4가지
10000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은
0장, 1장, 2장의 3가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불하는
경우의 수는
 $8 \times 4 \times 3 - 1 = 95 \quad \therefore a = 95$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

1000원짜리 5장으로 지불하는 금액과 5000원짜리 1장으로 지불하는 금액이 같고, 5000원짜리 2장으로 지불하는 금액과 10000원짜리 1장으로 지불하는 금액이 서로 같으므로 1000원짜리 지폐 2장과 5000원짜리 지폐 3장을 모두 1000원짜리 지폐로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 42장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

1000원짜리 지폐 42장으로 지불할 수 있는 금액은 1000원, 2000원, 3000원, ..., 42000원의 42가지
 $\therefore b=42$

(i), (ii)에서 $a-b=95-42=53$

답 ②

07 ${}_nP_4 - 3{}_nP_3 + 12{}_nP_2 = 0$ 에서

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$-3n(n+1)(n-1) + 12n(n-1) = 0$$

${}_nP_4$ 에서 $n \geq 4$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$(n-2)(n-3) - 3(n+1) + 12 = 0$$

$$n^2 - 8n + 15 = 0, (n-3)(n-5) = 0$$

$$\therefore n=3 \text{ 또는 } n=5$$

이때 $n \geq 4$ 이므로 $n=5$

답 ②

08 (i) A를 가장 앞에 세우는 경우의 수

B는 A의 바로 뒤에 세우고, 나머지 4명을 세우는 경우의 수
 이므로 $4! = 24$

(ii) A를 앞에서부터 2번째 또는 3번째 또는 4번째에 세우는 경우의 수

A를 앞에서부터 2번째, 3번째, 4번째 중 한 자리에 세우는 경우의 수는 3

B를 A와 이웃한 두 자리 중 한 자리에 세우는 경우의 수는 2
 나머지 4명을 세우는 경우의 수는 $4! = 24$ 이므로

$$3 \times 2 \times 24 = 144$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$24 + 144 = 168$$

답 ③

09 (㉠) $\rightarrow$ (㉡) $\rightarrow$ (㉢) $\rightarrow$ (㉣) $\rightarrow$ (㉤)의 순서로 색을 칠한다.

(i) (㉢), (㉣)에 같은 색을 칠하는 경우의 수

(㉠)에 칠할 수 있는 색은 5가지

(㉡)에 칠할 수 있는 색은 (㉠)에 칠한 색을 제외한 4가지

(㉢)에 칠할 수 있는 색은 (㉠), (㉡)에 칠한 색을 제외한 3가지

(㉣)에 칠할 수 있는 색은 (㉢)에 칠한 색과 같으므로 1가지

(㉤)에 칠할 수 있는 색은 (㉠), (㉢), (㉣)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로

$$5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3 = 180$$

(ii) (㉢), (㉣)에 다른 색을 칠하는 경우의 수

(㉠)에 칠할 수 있는 색은 5가지

(㉡)에 칠할 수 있는 색은 (㉠)에 칠한 색을 제외한 4가지

(㉢)에 칠할 수 있는 색은 (㉠), (㉡)에 칠한 색을 제외한 3가지

(㉣)에 칠할 수 있는 색은 (㉠), (㉡), (㉢)에 칠한 색을 제외한 2가지

(㉤)에 칠할 수 있는 색은 (㉠), (㉢), (㉣)에 칠한 색을 제외한 2가지
 이므로

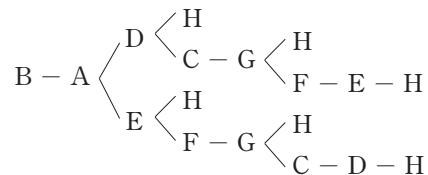
$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$180 + 240 = 420$$

답 ③

10 꼭짓점 B에서 출발하여 꼭짓점 A를 지나 꼭짓점 H에 도달하는 경우는



의 6가지이다.

이때 꼭짓점 B에서 출발하여 지날 수 있는 꼭짓점은 A, C, F의 3개이므로 구하는 경우의 수는

$$6 \times 3 = 18$$

답 ①

11 ${}_{n-1}P_r + r \times {}_{n-1}P_{r-1}$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(\overline{n-r}) \times (n-1)!}{(n-r) \times \{n-(r+1)\}!} + \frac{r \times (n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(\overline{n-r}) \times (n-1)!}{(n-r)!} + \frac{r \times (n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{\{(\overline{n-r}) + r\} \times (n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{\overline{n} \times (n-1)!}{(n-r)!} = {}_nP_r$$

따라서 ${}_nP_r = {}_{n-1}P_r + r \times {}_{n-1}P_{r-1}$ 이 성립한다.

답 ②

12 (i) 남여남여남여의 순서로 서는 경우의 수는

$$3! \times 3! = 36$$

(ii) 여남여남여남의 순서로 서는 경우의 수는

$$3! \times 3! = 36$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$36 + 36 = 72$$

답 ②

13 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7! = 5040$

(i) b와 c가 이웃하는 경우의 수

b와 c를 한 묶음으로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6! = 720$

b와 c가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$ 이므로

$$720 \times 2 = 1440$$

(ii) b 와 c 사이에 1개의 문자가 오는 경우의 수

b 와 c 사이에 올 수 있는 문자는

a, d, e, f, g 의 5개

$b \square c$ 를 한 묶음으로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$

b 와 c 가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$ 이므로

$$5 \times 120 \times 2 = 1200$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$5040 - 1440 - 1200 = 2400$$

답 ⑤

- 14 주어진 조건을 만족시키도록 남자와 여자의 자리를 정하는 경우는 다음과 같다.



위의 각각에 대하여 여자 4명이 앉는 경우의 수는 $4!$ 이고, 남자 5명이 앉는 경우의 수는 $5!$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 4! \times 5!$$

답 ④

- 15 (i) $45 \square 2, 45 \square 6, 46 \square 2$ 꼴의 자연수의 개수

각각의 십의 자리에 나머지 3개의 숫자 중에서 1개를 택하여 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$3 \times 3 = 9$$

- (ii) $5 \square \square 2, 5 \square \square 4, 5 \square \square 6$ 꼴의 자연수의 개수

각각의 백의 자리와 십의 자리에 나머지 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4P_2 \times 3 = 36$$

- (iii) $6 \square \square 2, 6 \square \square 4$ 꼴의 자연수의 개수

각각의 백의 자리와 십의 자리에 나머지 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4P_2 \times 2 = 24$$

(i), (ii), (iii)에서 4500보다 큰 짝수의 개수는

$$9 + 36 + 24 = 69$$

답 ④

- 16 천의 자리에는 2 또는 4가 온다.

(i) 십만의 자리의 숫자가 홀수인 경우

홀 짝 짝 홀 짝 홀

홀수끼리는 서로 이웃하지 않으므로 만의 자리에는 짝수가 오고, 백의 자리와 일의 자리에 홀수, 십의 자리에 짝수가 와야 한다.

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4의 2개

만의 자리와 십의 자리에 천의 자리에 오는 숫자를 제외한 나머지 짝수 2개를 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$

십만의 자리, 백의 자리, 일의 자리에 홀수 3개를 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 여섯 자리 자연수의 개수는

$$2 \times 2 \times 6 = 24$$

(ii) 십만의 자리의 숫자가 짝수인 경우

짝 홀 짝 홀 짝 홀

홀수끼리는 서로 이웃하지 않으므로 만의 자리에는 홀수가 오고, 백의 자리와 일의 자리에 홀수, 십의 자리에 짝수가 와야 한다.

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4의 2개

십만의 자리에 올 수 있는 짝수는 천의 자리에 오는 숫자와 0을 제외한 1개

십의 자리에 올 수 있는 짝수는 십만의 자리와 천의 자리에 오는 짝수를 제외한 1개

만의 자리, 백의 자리, 일의 자리에 홀수 3개를 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 여섯 자리 자연수의 개수는

$$2 \times 1 \times 1 \times 6 = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$24 + 12 = 36$$

답 ②

- 17 $x + y + z(xy + 1) = x + y + z + xyz$ 의 값이 짝수가 되는 경우를 다음 세 가지로 구분하여 각각의 경우의 수를 구하면

(i) 세 수 모두 짝수인 경우의 수

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

(ii) 세 수 모두 홀수인 경우의 수

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

(iii) 세 수 중 하나만 짝수인 경우의 수

(x, y, z) 는 (짝, 홀, 홀), (홀, 짝, 홀), (홀, 홀, 짝)의 3가지 경우가 있으므로 $3 \times (3 \times 3 \times 3) = 81$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$27 + 27 + 81 = 135$$

답 ④

다른풀이 $x + y + z + xyz$ 의 값이 홀수가 되는 경우의 수는 세 수 중 하나만 홀수인 경우의 수이므로

$$3 \times (3 \times 3 \times 3) = 81$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 - 81 = 135$$

- 18



위의 그림에서 a 와 b 가 같은 줄에 이웃하여 앉는 경우는

①②, ②③, ④⑤, ⑥⑦, ⑦⑧, ⑧⑨의 6가지이다.

나머지 7개의 좌석에 c, d, e, f 가 앉는 경우의 수는 서로 다른

7개에서 4개를 택하는 순열의 수이므로 ${}_7P_4 = 840$

a, b 가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 840 \times 2 = 10080$$

답 ⑤

- 19 자연수가 3의 배수이면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다. ①

홀수 1, 3, 5 중에서 2개를 택하는 경우는

(1, 3), (1, 5), (3, 5)

합이 4 합이 6 합이 8

짝수 2, 4, 6 중에서 2개를 택하는 경우는

(2, 4), (2, 6), (4, 6)

합이 6 합이 8 합이 10

따라서 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수인 경우는

(1, 3, 2, 6), (1, 5, 2, 4), (3, 5, 4, 6)의 3가지 ②

각 경우를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$ ③

따라서 3의 배수인 네 자리 자연수의 개수는 $3 \times 24 = 72$ ④

답 72

채점기준	배점
① 자연수가 3의 배수일 조건 설명하기	2
② 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수가 되도록 네 개의 숫자를 택하는 경우의 수 구하기	3
③ ②의 각 경우를 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	1
④ 3의 배수인 네 자리 자연수의 개수 구하기	1

- 20 (1) 6명이 한 줄로 나란히 앉는 경우의 수는

$6! = 720$ ①

(2) A, B를 한 명으로 생각하여 5명이 한 줄로 앉는 경우의 수는

$5! = 120$

A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120 \times 2 = 240$ ②

(3) A, B는 이웃하게 앉고, D, E는 이웃하지 않게 앉는 경우는 다음과 같다.

$\bigcirc \text{ A, B } \bigcirc \vee \boxed{\text{C}} \vee \boxed{\text{F}} \vee$

A, B 2명을 한 명으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

4개의 자리 중 2개의 자리에 D, E가 앉는 경우의 수는

${}_4P_2 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \times 2 \times 12 = 144$ ③

답 (1) 720 (2) 240 (3) 144

채점기준	배점
① 6명이 한 줄로 나란히 앉는 경우의 수 구하기	1
② A, B가 이웃하게 앉는 경우의 수 구하기	2
③ A, B는 이웃하게 앉고, D, E는 이웃하지 않게 앉는 경우의 수 구하기	4

실전 문제 | 2회

p.64~67

- 01 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 합이 2인 경우는 (1, 1)의 1가지

(ii) 합이 3인 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지

(iii) 합이 4인 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$1 + 2 + 3 = 6$

답 ③

- 02 a 에 $(e+f)(x+y+z)$ 가 곱해지므로 a 를 포함한 항의 개수는

$2 \times 3 = 6$

답 ②

- 03 (i) 김밥을 같은 종류로 시키는 경우의 수

A가 주문할 수 있는 김밥은 4종류

B가 주문할 수 있는 김밥은 A가 주문한 것과 같으므로

1종류

A, B가 라면 3종류 중에서 서로 다른 2종류를 주문하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$ 이므로

$4 \times 1 \times 6 = 24$

(ii) 라면을 같은 종류로 시키는 경우의 수

A가 주문할 수 있는 라면은 3종류

B가 주문할 수 있는 라면은 A가 주문한 것과 같으므로

1종류

A, B가 김밥 4종류 중에서 서로 다른 2종류를 주문하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$ 이므로

$3 \times 1 \times 12 = 36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$24 + 36 = 60$

답 ①

- 04 (i) 흰 공, 검은 공의 순서대로 나열하는 경우의 수

$2! \times 3! = 12$

(ii) 검은 공, 흰 공의 순서대로 나열하는 경우의 수

$3! \times 2! = 12$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12 + 12 = 24$

답 ②

- 05 $9 \leq 2x + 3y + z \leq 11$ 에서

(i) $y=1$ 일 때

$9 \leq 2x + 3 + z \leq 11 \quad \therefore 6 \leq 2x + z \leq 8$

이를 만족시키는 순서쌍 (x, z) 는

(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4),

(3, 1), (3, 2)의 8개

(ii) $y=2$ 일 때

$9 \leq 2x + 6 + z \leq 11 \quad \therefore 3 \leq 2x + z \leq 5$

이를 만족시키는 순서쌍 (x, z) 는

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1)의 4개

(iii) $y=3$ 일 때

$9 \leq 2x + 9 + z \leq 11 \quad \therefore 0 \leq 2x + z \leq 2$

이를 만족시키는 자연수 x, z 의 순서쌍 (x, z) 는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$8+4=12$$

답 ①

06 조건 (가), (나), (다)에서 의하여 2는 천의 자리의 숫자이다.

(i) 일의 자리의 숫자가 1인 자연수의 개수

만의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$$3!=6$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 1이 아닌 자연수의 개수

1은 만의 자리 또는 십의 자리의 숫자이고, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 5의 2개, 나머지 2개의 숫자를 2개의 자리에 나열하는 경우의 수는 $2!=2$ 이므로

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$6+8=14$$

답 ③

07 $(1-a_1)(2-a_2)(3-a_3)(4-a_4)=0$ 에서

$a_1=1$ 또는 $a_2=2$ 또는 $a_3=3$ 또는 $a_4=4$

이를 만족시키지 않는 경우, 즉 $a_1 \neq 1$,

$a_2 \neq 2$, $a_3 \neq 3$, $a_4 \neq 4$ 인 경우를 수형도로

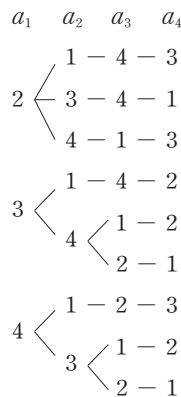
나타내면 오른쪽과 같이 9가지이다.

이때 네 개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$4!=24$$

이므로 구하는 자연수의 개수는

$$24-9=15$$



답 ④

08 a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이이고 $a \geq b \geq c$ 이므로

$$a < b+c$$

이때 $a+b+c=15$ 에서 $b+c=15-a$ 이므로

$$a < 15-a, 2a < 15$$

$$\therefore a < \frac{15}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$a \geq b \geq c$ 에서 $a+b+c \leq a+a+a$ 이므로

$$15 \leq 3a \quad \therefore a \geq 5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$5 \leq a < \frac{15}{2}$$

따라서 자연수 a 의 값이 될 수 있는 수는 5, 6, 7이다.

(i) $a=5$ 일 때

$b+c=10, a \geq b \geq c$ 를 만족시키는 순서쌍 (b, c) 는

(5, 5)의 1개

(ii) $a=6$ 일 때

$b+c=9, a \geq b \geq c$ 를 만족시키는 순서쌍 (b, c) 는

(6, 3), (5, 4)의 2개

(iii) $a=7$ 일 때

$b+c=8, a \geq b \geq c$ 를 만족시키는 순서쌍 (b, c) 는

(7, 1), (6, 2), (5, 3), (4, 4)의 4개

(i), (ii), (iii)에서 구하는 삼각형의 개수는

$$1+2+4=7$$

답 ③

09 $nP_r = nP_r + A(r) \times nP_{r-1} + B(r) \times nP_{r-2}$ 에 $r=3$ 을 대입하면

$$nP_3 = nP_3 + A(3) \times nP_2 + B(3) \times nP_1 \quad (n \geq 5)$$

$$n(n-1)(n-2) = (n-2)(n-3)(n-4)$$

$$+ A(3)(n-2)(n-3) + B(3)(n-2)$$

$$n(n-1) = (n-3)(n-4) + A(3)(n-3) + B(3) \quad (\because n \geq 5)$$

$$\therefore n^2 - n = n^2 + \{-7 + A(3)\}n + 12 - 3A(3) + B(3)$$

이 등식이 n 에 대한 항등식이므로

$$-1 = -7 + A(3), 0 = 12 - 3A(3) + B(3)$$

$$\therefore A(3) = 6, B(3) = 6$$

$$\therefore A(3) + B(3) = 6 + 6 = 12$$

답 ④

10 $E \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$ 의 순서로 색을 칠한다.

(i) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우의 수

E에 칠할 수 있는 색은 5가지

C에 칠할 수 있는 색은 E에 칠한 색을 제외한 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 E, C에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같으므로 1가지

A에 칠할 수 있는 색은 E, C, B(D)에 칠한 색을 제외한 2가지이므로

$$5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 2 = 120$$

(ii) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우의 수

E에 칠할 수 있는 색은 5가지

C에 칠할 수 있는 색은 E에 칠한 색을 제외한 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 E, C에 칠한 색을 제외한 3가지

D에 칠할 수 있는 색은 E, C, B에 칠한 색을 제외한 2가지

A에 칠할 수 있는 색은 E, C, B에 칠한 색을 제외한 2가지이므로

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$120 + 240 = 360$$

답 ③

11 6개의 숫자 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는 ${}_6P_4 = 360$

천의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 모두 짝수인 네 자리 자연수의 개수는 3개의 숫자 2, 4, 6 중에서 2개를 택하여 천의 자리와 일의 자리에 나열하고, 나머지 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 백의 자리와 십의 자리에 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3P_2 \times {}_4P_2 = 72$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$360 - 72 = 288$$

답 ③

12 세 자리 자연수를 만들 때

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 짝수의 개수

백의 자리와 십의 자리에 나머지 5개의 숫자 중 2개를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5P_2 = 20$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 0이 아닌 짝수의 개수

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4의 2개

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 일의 자리의 숫자를 제외한 4개

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 일의 자리와 백의 자리의 숫자를 제외한 4개이므로

$$2 \times 4 \times 4 = 32$$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$$20 + 32 = 52$$

답 ①

13 1부터 85까지의 자연수 중에서

2의 배수는 42개

4의 배수는 21개

8의 배수는 10개

16의 배수는 5개

32의 배수는 2개

64의 배수는 1개

이므로 85!을 소인수분해했을 때 2의 지수는

$$42 + 21 + 10 + 5 + 2 + 1 = 81$$

또, 1부터 85까지의 자연수 중에서

5의 배수는 17개

25의 배수는 3개

이므로 85!을 소인수분해했을 때 5의 지수는

$$17 + 3 = 20$$

따라서 85!의 10의 지수는 20이므로 연속으로 나오는 0은 20개이다.

답 ①

14 301부터 400까지의 자연수 중에서

(i) 백의 자리의 숫자가 3인 수의 개수는 99

(ii) 백의 자리의 숫자가 3, 십의 자리의 숫자가 3 또는 6 또는 9이고 일의 자리의 숫자는 3, 6, 9가 아닌 수의 개수

십의 자리에 올 수 있는 숫자가 3개, 일의 자리에 올 수 있는 숫자가 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8의 7개이므로

$$3 \times 7 = 21$$

(iii) 백의 자리의 숫자가 3이고 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자가 모두 3 또는 6 또는 9인 수의 개수

$$3 \times 3 = 9$$

(iv) 백의 자리의 숫자가 3이고 십의 자리의 숫자는 3, 6, 9가 아니고 일의 자리의 숫자가 3 또는 6 또는 9인 수의 개수

십의 자리에 올 수 있는 숫자가 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8의 7개, 일의 자리에 올 수 있는 숫자가 3개이므로

$$7 \times 3 = 21$$

(i)~(iv)에서 박수를 친 총 횟수는

$$99 + 21 + 9 \times 2 + 21 = 159$$

답 ②

참고 백의 자리에 오는 3의 개수는 99

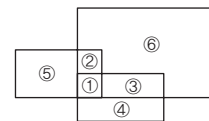
십의 자리에 오는 3 또는 6 또는 9의 개수는 $21 + 9 = 30$

일의 자리에 오는 3 또는 6 또는 9의 개수는 $9 + 21 = 30$

따라서 박수를 친 총 횟수는

$$99 + 30 + 30 = 159$$

15



위의 그림과 같이 각각의 영역을 ①, ②, ③, ..., ⑥이라 하고, ① → ② → ③ → ④ → ⑤ → ⑥의 순서로 색을 칠한다.

(i) ②와 ③에 같은 색을 칠하는 경우의 수

①에 칠할 수 있는 색은 5가지

②에 칠할 수 있는 색은 ①에 칠한 색을 제외한 4가지

③에 칠할 수 있는 색은 ②에 칠한 색과 같으므로 1가지

④에 칠할 수 있는 색은 ①, ③에 칠한 색을 제외한 3가지

⑤에 칠할 수 있는 색은 ①, ②에 칠한 색을 제외한 3가지

⑥에 칠할 수 있는 색은 ②(③)에 칠한 색을 제외한 4가지

이므로

$$5 \times 4 \times 1 \times 3 \times 3 \times 4 = 720$$

(ii) ②와 ③에 다른 색을 칠하는 경우의 수

①에 칠할 수 있는 색은 5가지

②에 칠할 수 있는 색은 ①에 칠한 색을 제외한 4가지

③에 칠할 수 있는 색은 ①, ②에 칠한 색을 제외한 3가지

④에 칠할 수 있는 색은 ①, ③에 칠한 색을 제외한 3가지

⑤에 칠할 수 있는 색은 ①, ②에 칠한 색을 제외한 3가지

⑥에 칠할 수 있는 색은 ②, ③에 칠한 색을 제외한 3가지

이므로

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 1620$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$720 + 1620 = 2340$$

답 ③

16 1번, 2번 학생은 이웃하고, 5번, 6번 학생은 이웃하지 않는 경우는 다음과 같다.



1번, 2번 학생을 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

1번, 2번 학생이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

일렬로 세운 3명의 사이사이와 양 끝 4개의 자리 중 2개의 자리에 5번, 6번 학생 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$
따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 2 \times 12 = 144$ **답 ⑤**

17 세 수의 합이 6인 경우는

$4+1+1=6$, $3+2+1=6$, $2+2+2=6$
서로 다른 3개의 주머니에서 공을 1개씩 꺼낼 때,
4, 1, 1이 적힌 공을 각각 1개씩 꺼내는 경우는
(4, 1, 1), (1, 4, 1), (1, 1, 4)의 3가지이므로 경우의 수는 3
3, 2, 1이 적힌 공을 각각 1개씩 꺼내는 경우의 수는 $3!=6$
2, 2, 2가 적힌 공을 각각 1개씩 꺼내는 경우의 수는 1
따라서 구하는 경우의 수는
 $3+6+1=10$ **답 ①**

18 여자 2명, 남자 3명이 앉을 때,

(i) 여자 2명이 3인용 소파에 이웃하여 앉는 경우의 수

여자 2명이 3인용 소파의 맨 왼쪽 또는 맨 오른쪽을 비워 놓고 나란히 앉는 경우의 수는

$${}_2P_2 + {}_2P_2 = 2 + 2 = 4$$

남자 3명이 남은 자리에 앉는 경우의 수는 $3!=6$ 이므로

$$4 \times 6 = 24 \quad \dots\dots ①$$

(ii) 여자 2명이 2인용 소파에 이웃하여 앉는 경우의 수

여자 2명이 2인용 소파에 앉는 경우의 수는 $2!=2$

남자 3명이 3인용 소파에 앉는 경우의 수는 $3!=6$ 이므로

$$2 \times 6 = 12 \quad \dots\dots ②$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$24 + 12 = 36 \quad \dots\dots ③$$

답 36

채점기준	배점
① 남자 3명과 여자 2명이 앉을 때, 여자 2명이 3인용 소파에 이웃하여 앉는 경우의 수 구하기	3
② 남자 3명과 여자 2명이 앉을 때, 여자 2명이 2인용 소파에 이웃하여 앉는 경우의 수 구하기	3
③ 남자 3명과 여자 2명이 앉을 때, 여자 2명이 같은 소파에 이웃하여 앉는 경우의 수 구하기	1

19 1부터 9까지의 9개의 자연수 중에서 소수는

2, 3, 5, 7 $\dots\dots ①$

백의 자리의 숫자가 9인 비밀번호의 개수는 네 개의 소수 2, 3, 5,

7 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4P_2=12$$

같은 방법으로 백의 자리의 숫자가 8인 비밀번호의 개수도

$${}_4P_2=12$$

백의 자리의 숫자가 7인 비밀번호의 개수는

(i) 십의 자리가 소수일 때

십의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 2, 3, 5의 3개

일의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 십의 자리와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 7개이므로

$$3 \times 7 = 21$$

(ii) 십의 자리가 소수가 아닐 때

십의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 1, 4, 6, 8, 9의 5개

일의 자리에 들어갈 수 있는 숫자는 7을 제외한 나머지 소수 2, 3, 5의 3개이므로

$$5 \times 3 = 15$$

(i), (ii)에서 백의 자리의 숫자가 7인 비밀번호의 개수는

$$21 + 15 = 36$$

따라서 백의 자리의 숫자가 9 또는 8 또는 7인 자연수의 개수는

$$12 + 12 + 36 = 60 \quad \dots\dots ②$$

이때 백의 자리의 숫자가 6인 비밀번호를 큰 수부터 차례로 나열하면

675, 673, 672, 657, ...

이고, 비밀번호는 64번째의 수이므로 657이다. $\dots\dots ③$

답 657

채점기준	배점
① 1부터 9까지의 자연수 중에서 소수 구하기	1
② 백의 자리의 숫자가 9 또는 8 또는 7인 자연수의 개수 구하기	4
③ 비밀번호 구하기	2

수능형 기출문제 & 변형문제

p.68~70

1 ① → ⑥ → ② → ③ → ⑤ → ④의 순서로 색을 칠한다.

1이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 4가지

6이 적힌 정사각형에는 1이 적힌 정사각형에 칠한 색과 같은 색을 칠해야 하므로 칠할 수 있는 색은 1가지

2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 3가지

3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2, 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1, 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 1 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 96 \quad \text{답 ③}$$

2 빨간색과 파란색은 이웃하지 않고, ①, ③,

④, ⑤에만 들어갈 수 있으므로



(i) ①번 칸에 빨간색 물감을 짜내는 경우의 수
파란색 물감을 짜낼 수 있는 칸은 ③, ④, ⑤의 3개
나머지 4개 칸에 4가지 색의 물감을 짜내는 경우의 수는
 $4! = 24$ 이므로
 $3 \times 24 = 72$

(ii) ③번 칸에 빨간색 물감을 짜내는 경우의 수
파란색 물감을 짜낼 수 있는 칸은 ①, ⑤의 2개
나머지 4개 칸에 4가지 색의 물감을 짜내는 경우의 수는
 $4! = 24$ 이므로
 $2 \times 24 = 48$

(iii) ④번 칸에 빨간색 물감을 짜내는 경우의 수
파란색 물감을 짜낼 수 있는 칸은 ①의 1개
나머지 4개 칸에 4가지 색의 물감을 짜내는 경우의 수는
 $4! = 24$ 이므로
 $1 \times 24 = 24$

(iv) ⑤번 칸에 빨간색 물감을 짜내는 경우의 수
파란색 물감을 짜낼 수 있는 칸은 ①, ③의 2개
나머지 4개 칸에 4가지 색의 물감을 짜내는 경우의 수는
 $4! = 24$ 이므로
 $2 \times 24 = 48$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$72 + 48 + 24 + 48 = 192$$

답 ⑤

3 홀수가 적힌 카드 3장을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$
이 3장의 카드의 사이사이와 양 끝 4개의 자리 중 2개의 자리에
짝수가 적힌 카드 2장을 하나씩 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$
따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 12 = 72$

답 ⑤

4 (i) 6번 학생을 양 끝자리 중 한 곳에 세우는 경우
6번 학생을 양 끝 두 자리 중 한 곳을 택하여 세우는 경우의
수는 2
6번 학생과 이웃하는 한 자리를 제외한 나머지 4개의 자리에
1번, 2번 학생 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$
나머지 3개의 자리에 3명의 학생들을 일렬로 세우는 경우의
수는 $3! = 6$ 이므로
 $2 \times 12 \times 6 = 144$

(ii) 6번 학생을 양 끝이 아닌 자리에 세우는 경우
6번 학생을 가운데 네 자리 중 하나를 택하여 세우는 경우의
수는 4
6번 학생과 이웃하는 두 자리를 제외한 나머지 3개의 자리에
1번, 2번 학생 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$
나머지 3개의 자리에 3명의 학생들을 일렬로 세우는 경우의
수는 $3! = 6$ 이므로
 $4 \times 6 \times 6 = 144$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$144 + 144 = 288$$

답 ④

5 양 끝에 2학년이 앉고, 1학년은 이웃하지 않으려면 1학년은 2학
년 사이사이에 앉아야 한다.

2학년 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $4! = 24$

2학년 4명 사이사이의 3개의 자리 중 2개의 자리에 1학년 2명이
앉는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 6 = 144$$

답 ③

6 A, B가 나란히 이웃하여 앉을 수 있는 2인용 의자는 3개

A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

C, D가 남은 5개의 자리 중 2개의 자리에 앉는 경우의 수는

${}_5P_2 = 20$ 이고, C, D가 나란히 이웃하여 앉을 수 있는 2인용 의자

는 2개, C, D가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$ 이므로 C, D
가 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는

$$20 - 2 \times 2 = 16$$

남은 3개의 자리에 E, F, G가 앉는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 2 \times 16 \times 6 = 576$$

답 576

2 조합

교과서 예제

p.73

01 (1) ${}_8C_2 = \frac{{}_8P_2}{2!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$
 (2) ${}_5C_4 = \frac{{}_5P_4}{4!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$ **답** (1) 28 (2) 5 (3) 1 (4) 1

02 (1) ${}_nC_3 = 20$ 에서 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 20$
 $n(n-1)(n-2) = 120 = 6 \times 5 \times 4 \quad \therefore n = 6$
 (2) ${}_{2n+1}C_2 = 21$ 에서 $\frac{(2n+1) \times 2n}{2!} = 21$
 $2n^2 + n = 21, 2n^2 + n - 21 = 0$
 $(2n+7)(n-3) = 0 \quad \therefore n = 3 \quad (\because n \text{은 자연수})$
 (3) ${}_nC_5 = {}_nC_6$ 에서 $n-5=6 \quad \therefore n=11$
 (4) ${}_{12}C_r = {}_{12}C_{r-4}$ 에서 $12-r=r-4$
 $2r=16 \quad \therefore r=8$
 (5) ${}_nC_4 + {}_nC_5 = {}_{n+1}C_5$
 즉, ${}_{n+1}C_5 = {}_9C_5$ 이므로 $n+1=9 \quad \therefore n=8$
답 (1) 6 (2) 3 (3) 11 (4) 8 (5) 8

03 ${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ **답** 120

04 ${}_9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$ **답** 126

05 (1) ${}_{12}C_4 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$
 (2) 8개의 서양 약기 중에서 4개를 고르는 경우의 수는
 ${}_8C_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$
 4개의 전통 약기 중에서 2개를 고르는 경우의 수는
 ${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $70 \times 6 = 420$ **답** (1) 495 (2) 420

06 (1) a 를 제외한 5개의 문자 중에서 3개를 뽑는 경우의 수와 같으므로
 ${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$
 (2) a 를 제외한 5개의 문자 중에서 4개를 뽑는 경우의 수와 같으므로
 ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$
 (3) a, b 를 제외한 4개의 문자 중에서 3개를 뽑는 경우의 수와 같으므로
 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$ **답** (1) 10 (2) 5 (3) 4

07 ${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ **답** 10

08 (1) ${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = 6 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 1 = 60$
 (2) ${}_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 5 \times 1 \times \frac{1}{2} = 15$
 (3) ${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 \times \frac{1}{3 \times 2 \times 1} = 15$ **답** (1) 60 (2) 15 (3) 15

09 서로 다른 종류의 과일 7개를 3개, 3개, 1개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는
 ${}_7C_3 \times {}_4C_3 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = {}_7C_3 \times {}_4C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!}$
 $= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times 4 \times 1 \times \frac{1}{2 \times 1} = 70$
 이때 세 묶음으로 나누어진 과일을 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $70 \times 6 = 420$ **답** 420

기출 Best | 1회

p.74~77

01 ${}_nC_3 = {}_nC_5$ 에서 $n-3=5 \quad \therefore n=8$
 ${}_9C_r = {}_9C_{r-3}$ 에서 $r=r-3$ 또는 $9-r=r-3$
 이때 $r \neq r-3$ 이므로
 $9-r=r-3$ 에서
 $2r=12 \quad \therefore r=6$
 $\therefore n+r=8+6=14$ **답** ③

02 이차방정식 $9x^2 - {}_nP_r x - 12{}_nC_r = 0$ 의 두 근이 $-4, 12$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\frac{{}_nP_r}{9} = -4 + 12 = 8 \quad \therefore {}_nP_r = 72$
 $-\frac{12{}_nC_r}{9} = (-4) \times 12 = -48 \quad \therefore {}_nC_r = 36$
 이때 ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$ 이므로 $36 = \frac{72}{r!}$
 $r! = 2 \quad \therefore r = 2$
 따라서 ${}_nP_2 = 72$ 에서 $n(n-1) = 72$
 $9 \times 8 = 72$ 이므로 $n = 9$
 $\therefore n-r = 9-2 = 7$ **답** ②

03 ${}_8C_3 + {}_8C_4 + {}_9C_5 + {}_{10}C_6 = {}_9C_4 + {}_9C_5 + {}_{10}C_6$
 $= {}_{10}C_5 + {}_{10}C_6$
 $= {}_{11}C_6$
 따라서 $n=11, r=6$ 이므로
 $n+r=11+6=17$ **답** ②
참고 ${}_{11}C_6 = {}_{11}C_5$ 이지만 $r > 5$ 이므로 $r=6$

- 04 택한 두 수의 합이 짝수가 되는 경우는 (짝수)+(짝수)=(짝수)
또는 (홀수)+(홀수)=(짝수)인 경우이다.

(i) (짝수)+(짝수)인 경우의 수

4개의 짝수 2, 4, 6, 8 중 2개를 택하는 경우의 수이므로

$${}_4C_2=6$$

(ii) (홀수)+(홀수)인 경우의 수

5개의 홀수 1, 3, 5, 7, 9 중 2개를 택하는 경우의 수이므로

$${}_5C_2=10$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$6+10=16$$

답 ③

- 05 부부 9쌍, 즉 18명이 다른 사람과 악수하는 총 횟수는

$${}_{18}C_2=153$$

부부끼리 악수하는 총 횟수는 9

따라서 구하는 전체 악수 횟수는

$$153-9=144$$

답 ⑤

- 06 1학년 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_3=20$$

2학년 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 10 = 200$$

답 ③

- 07 구하는 경우의 수는 선수 A, B를 제외한 10명의 농구 선수 중에서
서 4명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{10}C_4=210$$

답 ③

- 08 9명의 학생 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_9C_3=84$$

4명의 여학생 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3=4$$

5명의 남학생 중에서 대표 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3=10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$84 - (4 + 10) = 70$$

답 ①

- 09 남학생 5명 중에서 3명, 여학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의
수는

$${}_5C_3 \times {}_4C_2 = {}_5C_2 \times {}_4C_2 = 10 \times 6 = 60$$

여학생 2명을 양 끝에 세우는 경우의 수는 $2! = 2$

남학생 3명을 양 끝을 제외한 자리에 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$60 \times 2 \times 6 = 720$$

답 ④

- 10 서로 다른 3권의 소설책 중에서 2권, 서로 다른 4권의 시집 중
서 2권을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 3 \times 6 = 18$$

이때 4권의 책을 4명의 학생에게 한 권씩 선물하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$18 \times 24 = 432$$

답 ④

- 11 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2=15$$

한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2=3$$

주어진 한 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$$15 - 3 + 1 = 13$$

답 ②

- 12 칠각형의 대각선의 개수는 7개의 꼭짓점 중 2개를 택하는 경우의
수에서 변의 개수인 7을 뺀 것과 같으므로

$${}_7C_2 - 7 = 21 - 7 = 14$$

답 ①

- 13 8개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하
는 삼각형의 개수는

$${}_8C_3=56$$

답 ②

- 14 가로 방향의 6개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 5개의
평행한 직선 중에서 2개를 택하면 직사각형이 만들어지므로 구하
는 직사각형의 개수는

$${}_6C_2 \times {}_5C_2 = 15 \times 10 = 150$$

답 ③

- 15 가로 방향의 5개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 5개의
평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 만들어지
므로 만들 수 있는 직사각형의 개수는

$${}_5C_2 \times {}_5C_2 = 10 \times 10 = 100$$

한 변의 길이가 1, 2, 3, 4인 정사각형은 각각 16개, 9개, 4개,

1개이므로 정사각형의 개수는

$$16 + 9 + 4 + 1 = 30$$

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$$100 - 30 = 70$$

답 ①

- 16 4명을 2개의 조로 나눌 때, 각 조에 속하는 인원 수는 1명, 3명
또는 2명, 2명이다.

(i) 1명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_3 = 4 \times 1 = 4$$

(ii) 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$4 + 3 = 7$$

답 ①

- 17 8명을 3명, 3명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_3 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 56 \times 10 \times 1 \times \frac{1}{2} = 280 \quad \text{답 ③}$$

- 18 7명의 학생을 학생의 수가 모두 다른 3개의 조로 나누는 경우의 수는 1명, 2명, 4명으로 나누는 경우의 수이므로

$${}_7C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 = 7 \times 15 \times 1 = 105$$

3개의 조가 서로 다른 세 문제를 택하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$105 \times 6 = 630 \quad \text{답 ④}$$

- 19 서로 다른 7개의 빵을 3개의 바구니에 넣을 때, 각 바구니에 넣는 빵의 개수는 1개, 3개, 3개 또는 2개, 2개, 3개이다.

(i) 1개, 3개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_1 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 7 \times 20 \times 1 \times \frac{1}{2} = 70$$

(ii) 2개, 2개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 21 \times 10 \times 1 \times \frac{1}{2} = 105$$

(i), (ii)에서 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$$70 + 105 = 175$$

세 묶음을 바구니 3개에 넣는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$175 \times 6 = 1050 \quad \text{답 ③}$$

- 20 8명의 선수를 4명, 4명의 두 그룹으로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 70 \times 1 \times \frac{1}{2} = 35$$

한 그룹의 4명의 선수를 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는 각각

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

따라서 대진표를 작성하는 경우의 수는

$$35 \times 3 \times 3 = 315 \quad \text{답 ③}$$

기출 Best | 2회

p.78~81

- 01 ${}_nC_5 = {}_nC_{\frac{n}{2}+1}$ 에서

$$5 = \frac{n}{2} + 1 \text{ 또는 } n - 5 = \frac{n}{2} + 1$$

$$\frac{n}{2} = 4 \text{ 또는 } \frac{n}{2} = 6$$

$$\therefore n = 8 \text{ 또는 } n = 12$$

이때 $n = 8$ 이면 ${}_8C_5 = {}_8C_3$

$n = 12$ 이면 ${}_{12}C_5 = {}_{12}C_7$

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$8 + 12 = 20 \quad \text{답 ④}$$

- 02 이차방정식 ${}_nC_3x^2 - \sqrt{5}{}_nP_2x + {}_nC_4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-\sqrt{5}{}_nP_2)^2 - 4{}_nC_3 \times {}_nC_4 = 0$$

$$5n^2(n-1)^2 - 4 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$\times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = 0$$

${}_nC_4$ 에서 $n \geq 4$ 이므로 양변을 $n^2(n-1)^2$ 으로 나누면

$$5 - \frac{(n-2)^2(n-3)}{36} = 0, \frac{(n-2)^2(n-3)}{36} = 5$$

$$(n-2)^2(n-3) = 6^2 \times 5$$

따라서 $n-2=6$ 이므로 $n=8$

답 ④

- 03 ${}_4C_0 + {}_5C_1 + {}_6C_2 + {}_7C_3 = {}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_6C_2 + {}_7C_3$ ($\because {}_nC_0 = 1$)

$$= {}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_7C_3$$

$$= {}_7C_2 + {}_7C_3 = {}_8C_3$$

답 ②

- 04 모임에 참석한 전체 학생 수를 n 이라 할 때, 모임에 참석한 학생들이 서로 한 번씩 악수를 하는 횟수는 ${}_nC_2$

$${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} = 66, n^2 - n - 132 = 0$$

$$(n-12)(n+11) = 0$$

$$\therefore n = 12 (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 모임에 참석한 학생은 12명이다.

답 ④

- 05 n 개의 참가팀들이 서로 다른 팀과 1번씩 경기를 하는 경우의 수는 ${}_nC_2$ 이고, 두 번씩 경기를 하므로

$$2 \times {}_nC_2 = 462, n(n-1) = 462 = 22 \times 21$$

$$\therefore n = 22$$

답 ④

- 06 여학생 수를 n 이라 하면 남학생 수는 $10-n$ 이다.

이때 $n \geq 10-n$ 이므로 $n \geq 5$

남녀 한 명씩을 대표로 뽑는 경우의 수는

$${}_nC_1 \times {}_{10-n}C_1 = n(10-n) = -n^2 + 10n$$

즉, $-n^2 + 10n = 24$ 이므로

$$n^2 - 10n + 24 = 0, (n-4)(n-6) = 0$$

$$\therefore n = 6 (\because n \geq 5)$$

답 ②

- 07 구하는 경우의 수는 A, B, C를 제외한 4명의 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_4C_3 = 4$

답 ①

- 08 1부터 10까지의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7이다.

10개의 공 중에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_4 = 210$$

소수가 아닌 수가 적힌 6개의 공 중에서 4개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 소수가 적힌 공이 적어도 한 개 이상 나오는 경우의 수는

$$210 - 15 = 195$$

답 ②

- 09 경찰관 4명 중에서 3명, 소방관 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3 \times {}_4C_2 = 4 \times 6 = 24$$

경찰관 3명 중에서 2명을 양 끝에 세우는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

나머지 3명을 가운데 세 자리에 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 6 \times 6 = 864$$

답 ⑤

- 10 가족 6명 중에서 부모를 포함한 4명을 뽑는 경우의 수는 부모를 제외한 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_2 = 6$$

부모를 1명으로 생각하여 3명이 일렬로 서는 경우의 수는

$$3! = 6$$

부모끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 2 = 72$$

답 ③

- 11 7개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_2 = 21$$

(i) 한 직선 위에 3개의 점이 있는 경우

3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

이고, 한 직선 위에 3개의 점이 있는 직선은 2개이다.

(ii) 한 직선 위에 4개의 점이 있는 경우

4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

이고, 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 1개이다.

(i), (ii)에서 구하는 직선의 개수는

$$21 - 3 \times 2 + 2 - 6 \times 1 + 1 = 12$$

답 ④

- 12 대각선의 개수가 35인 다각형을 n 각형이라 하면

$${}_nC_2 - n = 35, \frac{n(n-1)}{2} - n = 35$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0, (n+7)(n-10) = 0$$

$$\therefore n = 10 \quad (\because n \geq 4)$$

따라서 대각선의 개수가 35인 다각형은 십각형이므로 십각형의 꼭짓점의 개수는 10이다.

답 ④

- 13 서로 다른 10개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = 120$$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

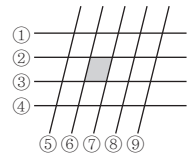
$$2 \times {}_5C_3 = 2 \times 10 = 20$$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$$120 - 20 = 100$$

답 ②

- 14 가로 방향의 평행한 직선 중 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중 2개를 택하면 평행사변형이 결정된다. 이때 가로줄은 ①, ② 중 하나, ③, ④ 중 하나를 택하고, 세로줄은 ⑤, ⑥ 중 하나, ⑦, ⑧, ⑨ 중 하나를 택하면 색칠한 부분을 포함하는 평행사변형이 만들어진다.



가로줄을 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 = 2 \times 2 = 4$$

세로줄을 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_3C_1 = 2 \times 3 = 6$$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$$4 \times 6 = 24$$

답 ③

- 15 가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 직사각형이 만들어지므로 모든 직사각형의 개수는

$${}_4C_2 \times {}_6C_2 = 6 \times 15 = 90$$

넓이가 1, 2, 3인 직사각형의 개수는 각각 15, 22, 14

따라서 넓이가 4 이상인 직사각형의 개수는

$$90 - (15 + 22 + 14) = 39$$

답 ③

- 16 서로 다른 7개의 사탕을 2개의 바구니에 담을 때, 각 바구니에 담은 사탕의 개수는 1개, 6개 또는 2개, 5개 또는 3개, 4개이다.

(i) 1개, 6개로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_1 \times {}_6C_6 = 7 \times 1 = 7$$

(ii) 2개, 5개로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_2 \times {}_5C_5 = 21 \times 1 = 21$$

(iii) 3개, 4개로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_3 \times {}_4C_4 = 35 \times 1 = 35$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$7 + 21 + 35 = 63$$

답 ④

- 17 (i) 특정한 2명의 학생이 2명으로 구성되는 모둠에 배정되는 경우 나머지 6명을 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 20 \times 1 \times \frac{1}{2} = 10$$

(ii) 특정한 2명의 학생이 3명으로 구성되는 모둠에 배정되는 경우 나머지 6명을 1명, 2명, 3명으로 나누면 되므로 이때의 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = 6 \times 10 \times 1 = 60$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$10 + 60 = 70$$

답 ③

- 18 서로 다른 6개의 빵을 3개의 접시에 담을 때, 각 접시에 담은 빵의 개수는 1개, 1개, 4개 또는 1개, 2개, 3개 또는 2개, 2개, 2개이다.

(i) 1개, 1개, 4개로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 5 \times 1 \times \frac{1}{2} = 15$$

(ii) 1개, 2개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = 6 \times 10 \times 1 = 60$$

(iii) 2개, 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{6} = 15$$

(i), (ii), (iii)에서 빵을 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$$15 + 60 + 15 = 90$$

세 묶음을 세 개의 서로 다른 접시에 담는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$90 \times 6 = 540$$

답 ①

19 9명의 학생을 서로 다른 3개의 방에 배정할 때, 각 방에 배정하는 학생 수는 2명, 3명, 4명 또는 3명, 3명, 3명이다.

(i) 2명, 3명, 4명으로 나누는 경우의 수는

$${}_9C_2 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 = 36 \times 35 \times 1 = 1260$$

(ii) 3명, 3명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{3!} = 84 \times 20 \times 1 \times \frac{1}{6} = 280$$

(i), (ii)에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$$1260 + 280 = 1540$$

3개의 조를 3개의 방에 배정하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$1540 \times 6 = 9240$$

답 ⑤

20 구하는 경우의 수는 먼저 6팀을 3팀, 3팀의 2개의 조로 나눈 후 각 조에서 부전승으로 올라가는 1팀을 택하는 경우의 수와 같으므로

$$\left({}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \right) \times {}_3C_1 \times {}_3C_1$$

$$= \left(20 \times 1 \times \frac{1}{2} \right) \times 3 \times 3 = 90$$

답 ⑤

변형유형 집중공략

p.82~83

1-1 전체 삼각형의 개수에서 직각삼각형의 개수를 뺀다.

12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = 220$$

$$\text{원의 지름은 } \frac{12}{2} = 6(\text{개})$$

나머지 10개의 점 중에서 한 점을 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_1 = 10$$

따라서 만들 수 있는 직각삼각형의 개수는

$$6 \times 10 = 60$$

이므로 직각삼각형이 아닌 삼각형의 개수는

$$220 - 60 = 160$$

답 ③

1-2 (i) 반원의 지름 위 6개의 점 중 2개, 호 위의 5개의 점(지름 위의 점은 제외) 중 3개를 꼭짓점으로 하는 오각형의 개수는

$${}_6C_2 \times {}_5C_3 = 15 \times 10 = 150$$

(ii) 반원의 지름 위 6개의 점 중 1개, 호 위의 5개의 점(지름 위의 점은 제외) 중 4개를 꼭짓점으로 하는 오각형의 개수는

$${}_6C_1 \times {}_5C_4 = {}_6C_1 \times {}_5C_1 = 6 \times 5 = 30$$

(iii) 호 위의 점(지름 위의 점은 제외) 5개를 꼭짓점으로 하는 오각형의 개수는

$${}_5C_5 = 1$$

(i), (ii), (iii)에서 오각형의 개수는

$$150 + 30 + 1 = 181$$

답 181

다른풀이 반원의 지름 위 6개의 점 중 3개 이상의 점을 택하면 오각형이 만들어지지 않는다.

11개의 점 중 5개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_{11}C_5 = 462$$

(i) 반원의 지름 위 6개의 점 중 3개, 호 위의 5개의 점(지름 위의 점은 제외) 중 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_5C_2 = 20 \times 10 = 200$$

(ii) 반원의 지름 위 6개의 점 중 4개, 호 위의 5개의 점(지름 위의 점은 제외) 중 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_4 \times {}_5C_1 = {}_6C_2 \times {}_5C_1 = 15 \times 5 = 75$$

(iii) 반원의 지름 위 6개의 점 중 5개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

(i), (ii), (iii)에서 오각형의 개수는

$$462 - (200 + 75 + 6) = 181$$

2-1 3개의 역 중 학생들이 내릴 2개의 역을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = 3$$

4명이 2개의 역에서 내릴 때, 각 역에서 내리는 학생의 수는 1명, 3명 또는 2명, 2명이다.

(i) 4명을 1명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_3 = 4 \times 1 = 4$$

(ii) 4명을 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

(i), (ii)에서 4명을 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$$4 + 3 = 7$$

2개의 조가 2개의 역에서 내리는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 7 \times 2 = 42$$

답 42

2-2 3개의 정류장 중 승객들이 내릴 2개의 정류장을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$

5명이 2개의 정류장에서 내릴 때, 각 역에서 내리는 승객의 수는 1명, 4명 또는 2명, 3명이다.

(i) 5명을 1명, 4명으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_4 = 5 \times 1 = 5$$

(ii) 5명을 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_3 = 10 \times 1 = 10$$

(i), (ii)에서 5명을 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$$5 + 10 = 15$$

2개의 조가 2개의 역에서 내리는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 15 \times 2 = 90$$

답 ⑤

서술형 What & How

p.84~87

1 10명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = 120$$

..... ①

남자만 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

..... ②

여자만 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3 = 4$$

..... ③

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 - (20 + 4) = 96$$

..... ④

답 96

2 15명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는

$${}_{15}C_3 = 455$$

..... ①

남학생 수를 n 이라 하면 남학생만 대표로 뽑는 경우의 수는

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

..... ②

적어도 한 명의 여학생을 대표로 뽑는 경우의 수가 371이므로

$$455 - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 371$$

..... ③

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 84$$

$$n(n-1)(n-2) = 504 = 9 \times 8 \times 7$$

$$\therefore n = 9$$

따라서 남학생은 9명이다.

..... ④

답 9

채점기준	배점
① 15명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수 구하기	1
② 남학생 수를 n 이라 하고 남학생만 대표로 뽑는 경우의 수 구하기	2
③ 주어진 조건을 이용하여 식 세우기	2
④ 남학생 수 구하기	2

3 1, 2를 제외한 7개의 수 중에서 3개의 수를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_3 = 35$$

..... ①

1과 위에서 택한 3개의 수를 포함하여 4개의 수를 나열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

..... ②

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$35 \times 24 = 840$$

..... ③

답 840

4 세 자리 자연수의 각 자리의 숫자의 합이 홀수가 되려면 각 자리의 숫자가 모두 홀수이거나 홀수가 1개, 짝수가 2개이어야 한다.

..... ①

(i) 각 자리의 숫자가 모두 홀수인 자연수의 개수

1, 3, 5, 7이 각각 적힌 4장의 카드에서 3장을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$${}_4C_3 \times 3! = 4 \times 6 = 24$$

..... ②

(ii) 각 자리의 숫자가 홀수 1개, 짝수 2개인 자연수의 개수

(가) 짝수가 적힌 카드 중 0이 적힌 카드가 포함된 경우

홀수가 적힌 카드 1장을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

0을 포함하여 짝수가 적힌 카드 2장을 뽑는 경우는 0, 2 또는 0, 4 또는 0, 6의 3가지

0은 백의 자리에 올 수 없으므로 위와 같이 뽑은 3장의 카드를 나열하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times 2! = 2 \times 2 = 4$$

따라서 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$$4 \times 3 \times 4 = 48$$

(나) 짝수가 적힌 카드 중 0이 적힌 카드가 포함되지 않은 경우

홀수가 적힌 카드 1장을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

짝수가 적힌 카드 2장을 뽑는 경우의 수는 ${}_3C_2 = 3$

위와 같이 뽑은 3장의 카드를 나열하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$$4 \times 3 \times 6 = 72$$

..... ③

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$24 + (48 + 72) = 144$$

..... ④

답 144

채점기준	배점
① 각 자리의 숫자의 합이 홀수가 될 조건 설명하기	1
② 각 자리의 숫자가 모두 홀수인 자연수의 개수 구하기	2
③ 각 자리의 숫자가 홀수 1개, 짝수 2개인 자연수의 개수 구하기	4
④ 자연수의 개수 구하기	1

5 (1) 8개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_2 = 28$$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

이때 주어진 한 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$$28 - 6 + 1 = 23$$

..... ①

(2) 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_3 = 56$$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$56 - 4 = 52 \quad \dots\dots ②$$

답 (1) 23 (2) 52

6 12개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = 220 \quad \dots\dots ①$$

(i) 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$$3 \times {}_4C_3 = 3 \times 4 = 12 \quad \dots\dots ②$$

(ii) 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$$8 \times {}_3C_3 = 8 \times 1 = 8 \quad \dots\dots ③$$

(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는

$$220 - 12 - 8 = 200 \quad \dots\dots ④$$

답 200

채점기준	배점
① 12개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수 구하기	2
② 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수 구하기	2
③ 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수 구하기	2
④ 삼각형의 개수 구하기	1

7 5명의 학생을 3개의 조로 나눌 때, 각 조에 속하는 학생 수는 1명, 1명, 3명 또는 1명, 2명, 2명이다.

(i) 1명, 1명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 5 \times 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 10$$

(ii) 1명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 5 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 15$$

(i), (ii)에서 3개의 조로 나누는 경우의 수는

$$10 + 15 = 25 \quad \dots\dots ①$$

3개의 조를 3대의 레일바이크에 배정하는 경우의 수는

$$3! = 6 \quad \dots\dots ②$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$25 \times 6 = 150 \quad \dots\dots ③$$

답 150

8 빈 접시가 1개이므로 4개의 접시 중 빵을 올려놓을 3개의 접시를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = 4 \quad \dots\dots ①$$

빵 6개를 3개의 조로 나누는 경우는 4개, 1개, 1개 또는 3개, 2개, 1개 또는 2개, 2개, 2개이다.

(i) 4개, 1개, 1개로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_4 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 15 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 15$$

(ii) 3개, 2개, 1개로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = 20 \times 3 \times 1 = 60$$

(iii) 2개, 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{6} = 15 \quad \dots\dots ②$$

3개의 조로 나누는 빵을 3개의 접시에 올려놓는 경우의 수는

$$3! = 6 \quad \dots\dots ③$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times (15 + 60 + 15) \times 6 = 2160 \quad \dots\dots ④$$

답 2160

채점기준	배점
① 빵을 올려놓을 3개의 접시를 택하는 경우의 수 구하기	2
② 6개의 빵을 3개의 조로 나누는 각 경우의 수 구하기	4
③ 3개의 조로 나누는 빵을 3개의 접시에 올려놓는 경우의 수 구하기	1
④ 경우의 수 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.88~91

01 ${}_{18}C_r = {}_{18}C_{r^2-2}$ 에서

$$r = r^2 - 2 \text{ 또는 } 18 - r = r^2 - 2$$

$$r^2 - r - 2 = 0 \text{ 또는 } r^2 + r - 20 = 0$$

$$(r+1)(r-2) = 0 \text{ 또는 } (r+5)(r-4) = 0$$

$$\therefore r = 2 \text{ 또는 } r = 4 \quad (\because r \text{는 자연수})$$

$$r = 2 \text{일 때, } {}_{18}C_r = {}_{18}C_{r^2-2} \text{에서 } {}_{18}C_2 = {}_{18}C_2$$

$$r = 4 \text{일 때, } {}_{18}C_r = {}_{18}C_{r^2-2} \text{에서 } {}_{18}C_4 = {}_{18}C_{14}$$

따라서 모든 자연수 r 의 값의 합은

$$2 + 4 = 6$$

답 ③

02 ① ${}_nP_2 = 20$ 에서 $n(n-1) = 20$

$$5 \times 4 = 20 \text{이므로 } n = 5$$

$$\textcircled{2} {}_nP_n = 120 \text{에서 } n! = 120$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{이므로 } n = 5$$

$$\textcircled{3} {}_nC_4 = {}_nC_6 \text{에서 } n-4=6 \quad \therefore n=10$$

$$\textcircled{4} {}_nC_{n-2} = 21 \text{에서 } {}_nC_2 = 21$$

$$\frac{n(n-1)}{2!} = 21, n(n-1) = 42$$

$$7 \times 6 = 42 \text{이므로 } n = 7$$

$$\textcircled{5} {}_7C_2 + {}_7C_3 = {}_8C_3 \quad \therefore n = 8$$

따라서 n 의 값이 가장 큰 것은 ③이다.

답 ③

03 (i) 1학년 6명 중에서 5명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

(ii) 2학년 7명 중에서 5명을 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

(iii) 3학년 5명 중에서 5명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_5 = 1$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 21 + 1 = 28$$

답 ②

- 04 (가) 5명의 학생 중에서 2명을 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5P_2=20$$

- (나) 5명의 학생 중에서 2명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_2=10$$

- (다) 4곳 중에서 3곳을 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4P_3=24$$

- (라) 4곳 중에서 3곳을 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_3=4$$

따라서 각 경우의 수를 작은 것부터 크기순으로 나열하면

- (라), (나), (가), (다)

답 ④

- 05 서로 다른 5컬레의 신발 중에서 짝이 맞는 2컬레를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

나머지 3컬레 중에서 서로 다른 2컬레를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2={}_3C_1=3$$

각각의 컬레에서 한 짝의 신발을 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_2C_1=2 \times 2=4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 3 \times 4=120$$

답 ③

- 06 E와 E는 서로 이웃하고, C와 C는 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우는 다음과 같다.

$$\vee \text{ (E, E) } \vee \text{ [S] } \vee \text{ [I] } \vee \text{ [N] } \vee$$

E와 E를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$4!=24$$

5개의 $\vee$ 자리 중 2개의 자리에 C와 C를 나열하는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 10=240$$

답 ④

- 07 9명 중에서 대표 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_9C_4=126$$

남학생 5명 중에서 대표 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

여학생 4명 중에서 대표 4명을 뽑는 경우의 수는

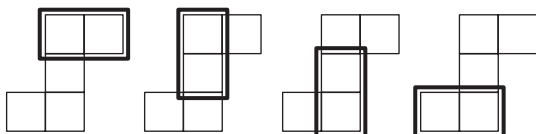
$${}_4C_4=1$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$126 - (5 + 1) = 120$$

답 ⑤

08



두 칸이 이웃하는 경우는 위의 그림과 같이 4가지이므로

A, B를 써넣을 칸을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

나머지 3개의 문자를 써넣는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 2 \times 6=48$$

답 ⑤

- 09 세 자리 자연수의 각 자리 숫자의 곱이 10의 배수이려면 각 자리 숫자에 5와 적어도 한 개의 짝수가 반드시 포함되어야 한다.

5를 제외한 나머지 6개의 자연수 중 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2=15$$

이때 홀수만 2개를 택하는 경우의 수는 1, 3, 7 중 2개를 택하는 경우의 수이므로 ${}_3C_2={}_3C_1=3$

따라서 5와 적어도 한 개의 짝수를 포함하여 세 수를 택하는 경우의 수는

$$15 - 3 = 12$$

세 수를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$12 \times 6=72$$

답 ①

- 10 (i) 빨간색 공이 나오지 않고, 노란색 공이 나오지 않는 경우의 수

빨간색, 노란색을 제외한 나머지 10개의 공 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수이므로

$${}_{10}C_4=210$$

- (ii) 노란색 공이 나오지 않고, 빨간색 공이 나오지 않는 경우의 수

같은 방법으로 ${}_{10}C_4=210$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$210 + 210 = 420$$

답 ⑤

- 11 조건 (가)를 만족시키도록 3팀으로 나누는 경우의 수는

$$({}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1) \times ({}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1) \times ({}_1C_1 \times {}_1C_1 \times {}_1C_1) \times \frac{1}{3!}$$

$$= (3 \times 3 \times 3) \times (2 \times 2 \times 2) \times (1 \times 1 \times 1) \times \frac{1}{6} = 36$$

3개의 팀이 네 부스 A, B, C, D 중 서로 다른 하나씩을 택하는 경우의 수는

$${}_4P_3=24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$36 \times 24=864$$

답 ⑤

- 12 구하는 경우의 수는 먼저 7명을 4명, 3명의 2개의 조로 나누고 4명의 조를 다시 2명, 2명으로 나누고 3명의 조를 다시 2명, 1명으로 나누는 경우의 수와 같으므로

$$({}_7C_4 \times {}_3C_3) \times ({}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}) \times ({}_3C_2 \times {}_1C_1)$$

$$= (35 \times 1) \times (6 \times 1 \times \frac{1}{2}) \times (3 \times 1) = 315$$

답 ④

- 13 꺼낸 공에 적힌 수 중에서 가장 큰 수를 M , 가장 작은 수를 m 이라 하자.

(i) $M+m=8$ 인 경우의 수

$M=7, m=1$ 일 때, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 5개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

$M=6, m=2$ 일 때, 3, 4, 5가 적힌 3개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$ 이므로

$$10+3=13$$

(ii) $M+m=9$ 인 경우의 수

$M=8, m=1$ 일 때, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 적힌 6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$

$M=7, m=2$ 일 때, 3, 4, 5, 6이 적힌 4개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

$M=6, m=3$ 일 때, 4, 5가 적힌 2개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_2C_2=1$ 이므로

$$15+6+1=22$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$13+22=35$$

답 ②

- 14 5명의 학생을 A, B, C, D, E라 하고 각 학생의 가방을 차례로 a, b, c, d, e 라 하자.

5개의 가방 중에서 주인에게 준 2개의 가방을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

A, B가 자기의 가방을 받았다고 할 때, C, D, E가 받을 수 있는 가방은 다음 표와 같다.

C	D	E
d	e	c
e	c	d

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 2 = 20$$

답 ④

- 15 $3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6$ 중 어느 두 수의 합은 모두 다르므로 구하는 경우의 수는 6개의 수를 2개, 2개, 2개의 3개의 조로 나눈 다음 각 조의 2개의 수의 자리를 바꾸는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} \times 2 \times 2 \times 2$$

$$= 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{6} \times 2 \times 2 \times 2 = 120$$

답 ④

- 16 6송이의 꽃을 2송이, 2송이, 2송이의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{6} = 15$$

세 묶음의 꽃을 세 사람에게 한 묶음씩 나누어 주는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 6 = 90$$

답 90

- 17 9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_3=84$$

위쪽 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

아래쪽 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=10$$

한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로

구하는 삼각형의 개수는

$$84 - (4 + 10) = 70$$

답 ③

다른풀이 (i) 위쪽 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 1개, 아래쪽 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_5C_2 = 4 \times 10 = 40$$

(ii) 위쪽 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개, 아래쪽 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_5C_1 = 6 \times 5 = 30$$

(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는

$$40 + 30 = 70$$

- 18 (i) 각 자리의 숫자 중 0이 포함된 세 자리 자연수의 개수

0을 미리 택하고, 0을 제외한 5개의 숫자 중 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

위의 3개의 숫자 중 0은 십의 자리에, 가장 작은 숫자는 백의 자리에, 가장 큰 숫자는 일의 자리에 나열하는 경우의 수는 1이므로

$$10 \times 1 = 10$$

..... ①

(ii) 각 자리의 숫자 중 0이 포함되지 않은 세 자리 자연수의 개수

0을 제외한 5개의 숫자 중 3개의 수를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=10$$

가장 큰 숫자를 일의 자리에, 나머지 두 숫자를 백의 자리와 십의 자리에 나열하는 경우의 수는 $2!=2$ 이므로

$$10 \times 2 = 20$$

..... ②

(i), (ii)에서 구하는 세 자리 자연수의 개수는

$$10 + 20 = 30$$

..... ③

답 30

채점기준	배점
① 각 자리의 숫자 중 0이 포함된 세 자리 자연수의 개수 구하기	2
② 각 자리의 숫자 중 0이 포함되지 않은 세 자리 자연수의 개수 구하기	2
③ 세 자리 자연수의 개수 구하기	1

- 19 3개의 다리를 놓을 때 삼각형이 만들어지면 연결되지 않는 섬이 생긴다.

..... ①

각 섬을 연결할 수 있는 모든 다리의 개수는 네 개의 섬 중 두 개의 섬을 택하는 경우의 수이므로

$${}_4C_2=6$$

..... ②

6개 중 3개를 택하여 다리 3개를 놓는 경우의 수는

$${}_6C_3=20$$

..... ③

삼각형이 만들어지는 경우의 수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

..... ④

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 - 4 = 16$$

..... ⑤

답 16

채점기준	배점
① 연결되지 않는 섬이 생길 조건 설명하기	2
② 각 섬을 연결할 수 있는 모든 다리의 개수 구하기	1
③ 다리 3개를 놓는 경우의 수 구하기	1
④ 삼각형이 만들어지는 경우의 수 구하기	1
⑤ 경우의 수 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.92~95

$$\begin{aligned}
 01 \quad n \times {}_{n-1}C_{r-1} &= n \times \frac{(n-1)!}{(n-r)! \times (r-1)!} \\
 &= \frac{n! \times r}{(n-r)! \times (r-1)! \times r} \\
 &= \frac{n! \times r}{(n-r)! \times r!} \\
 &= r \times {}_nC_r
 \end{aligned}$$

즉, $f(r) = (r-1)!$, $g(n) = n!$, $h(r) = r!$ 이므로

$$f(3) + g(2) - h(1) = 2! + 2! - 1 = 3$$

답 ③

02 서로 다른 6대의 트럭에서 과수원에 보낼 2대의 트럭을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

5명의 운전기사 중 2대의 트럭을 각각 운전할 2명을 택하는 경우의 수는

$${}_5P_2 = 20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 20 = 300$$

답 ③

03 각 상자에 들어가는 초콜릿의 개수가 모두 다른 경우는 초콜릿을 1개, 2개, 3개씩 나누어 넣는 경우이다.

서로 다른 초콜릿 6개를 1개, 2개, 3개씩 나누는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = 6 \times 10 \times 1 = 60$$

3묶음의 초콜릿을 서로 다른 상자 3개에 한 묶음씩 담는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$60 \times 6 = 360$$

답 ④

04 8개의 팀이 서로 한 번씩 경기를 치르는 경우의 수는

$${}_8C_2 = 28$$

이때 $504 \div 28 = 18$ 이므로 한 팀은 나머지 팀들과 18번씩 경기를 치르게 된다.

따라서 정규시즌에 A팀과 B팀이 치르는 경기의 수는 18이다.

답 ⑤

05 A, B가 각각 2개씩 스포츠 클럽에 가입하는 모든 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_5C_2 = 10 \times 10 = 100$$

A, B가 같은 스포츠 클럽 2개에 가입하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$100 - 10 = 90$$

답 ④

다른풀이 (i) A와 B가 공통으로 가입하는 스포츠 클럽이 0개인 경우의 수

A가 가입할 스포츠 클럽 2개를 먼저 택하고, 남은 3개의 스포츠 클럽 중 B가 가입할 스포츠 클럽 2개를 택하면 되므로

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 10 \times 3 = 30$$

(ii) A와 B가 공통으로 가입하는 스포츠 클럽이 1개인 경우의 수
공통으로 가입할 스포츠 클럽 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_1 = 5$$

나머지 4개의 스포츠 클럽에서 2개를 택하여 A, B가 각각 하나씩 가입하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$ 이므로

$$5 \times 12 = 60$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$30 + 60 = 90$$

06 8개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_8C_3 = 56$$

선분 AF 위에 있는 6개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

선분 CH 위에 있는 3개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3 = 1$$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$$56 - (20 + 1) = 35$$

답 ③

07 10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

한 직선 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

이고, 이와 같은 직선이 3개이므로 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$$6 \times 3 = 18$$

주어진 세 직선을 포함하면 구하는 직선의 개수는

$$45 - 18 + 3 = 30$$

답 ③

08 남학생을 A실에 2명, B실에 3명 배치하는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_3 = 10 \times 1 = 10$$

여학생 6명을 C실과 D실에 각각 3명씩 배치하는 경우의 수는

$$\left({}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \right) \times 2! = 20 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 2 = 20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 20 = 200$$

답 ②

- 09 6개의 공에 적힌 수의 합이 홀수이려면 홀수가 적힌 공의 개수가 홀수이어야 한다.

주머니에 홀수가 적힌 공이 5개, 짝수가 적힌 공이 4개 들어 있으므로

- (i) 홀수가 적힌 공이 3개, 짝수가 적힌 공이 3개인 경우의 수

$${}_5C_3 \times {}_4C_3 = 10 \times 4 = 40$$

- (ii) 홀수가 적힌 공이 5개, 짝수가 적힌 공이 1개인 경우의 수

$${}_5C_5 \times {}_4C_1 = 1 \times 4 = 4$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$40 + 4 = 44$$

답 ①

- 10 크기가 모두 다른 5개의 빨간색 공을 똑같은 바구니 2개에 각각 2개, 3개씩 나누어 담는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_3 = 10 \times 1 = 10$$

빨간색 공이 2개, 3개 든 바구니에

- (i) 파란색 공을 각각 3개, 5개씩 넣는 경우의 수는

$${}_8C_3 = 56$$

- (ii) 파란색 공을 각각 4개, 4개씩 넣는 경우의 수는

$${}_8C_4 = 70$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$10 \times (56 + 70) = 1260$$

답 ①

- 11 8명을 2개의 조로 나눌 때, 각 조의 인원이 3명 이상이므로 각 조에는 3명, 5명 또는 4명, 4명이 들어가야 한다.

- (i) 각 조의 인원이 3명, 5명인 경우의 수

8명을 3명, 5명의 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_3 \times {}_5C_5 = 56 \times 1 = 56$$

3명인 조의 전원이 2학년인 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

5명인 조의 전원이 2학년인 경우의 수는 ${}_5C_5 = 1$ 이므로

$$56 - 10 - 1 = 45$$

- (ii) 각 조의 인원이 4명, 4명인 경우의 수

8명을 4명, 4명의 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 70 \times 1 \times \frac{1}{2} = 35$$

한 조의 전원이 2학년인 경우의 수는 ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$ 이므로

$$35 - 5 = 30$$

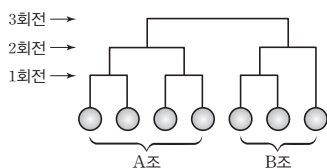
- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$45 + 30 = 75$$

답 ①

- 12 1회전은 같은 학년끼리 치르므로 부전승으로 올라가는 팀은 1학년이다.

부전승으로 올라갈 1학년 팀을 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$



- (i) B조에 1학년 두 팀을 배정하는 경우

2학년 4팀을 2팀씩 나누어 A조에 배정하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

- (ii) A조에 1학년 두 팀을 배정하는 경우

2학년 4팀 중에서 2팀을 택하여 B조에 배정하는 경우의 수는

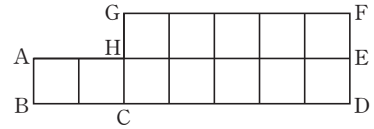
$${}_4C_2 = 6$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$3 \times (3 + 6) = 27$$

답 ④

13



직사각형 ABDE에서 만들 수 있는 직사각형의 개수는

$${}_8C_2 \times {}_2C_2 = 28 \times 1 = 28$$

직사각형 GCDF에서 만들 수 있는 직사각형의 개수는

$${}_6C_2 \times {}_3C_2 = 15 \times 3 = 45$$

직사각형 HCDE에서 만들 수 있는 직사각형의 개수는

$${}_6C_2 \times {}_2C_2 = 15 \times 1 = 15$$

따라서 구하는 직사각형의 개수는

$$28 + 45 - 15 = 58$$

답 ④

- 14 (홀수) + (홀수) + (홀수) = (홀수),

(홀수) + (짝수) + (짝수) = (홀수)

세 장의 카드에 적힌 수의 합이 홀수가 되려면 홀수가 적힌 카드가 1개 또는 3개이어야 한다.

1부터 $2n$ 까지의 자연수 중 홀수, 짝수는 각각 n 개씩이므로

- (i) 홀수가 3개인 경우

n 개의 홀수 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

- (ii) 홀수가 1개, 짝수가 2개인 경우

n 개의 홀수 중에서 1개, n 개의 짝수 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_nC_1 \times {}_nC_2 = n \times \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n^2(n-1)}{2}$$

- (i), (ii)에서

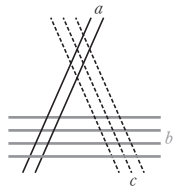
$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n^2(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6} + \frac{3n^2(n-1)}{6} \\ &= \frac{4n^3 - 6n^2 + 2n}{6} \\ &= \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{3} \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-3$, $c=1$ 이므로

$$abc = 2 \times (-3) \times 1 = -6$$

답 ①

- 15 오른쪽 그림과 같이 평행한 직선 2개, 4개, 3개를 각각 a , b , c 라 할 때, 만들 수 있는 평행사변형이 아닌 사다리꼴의 개수는 다음과 같다.



- (i) a 에서 2개, b , c 에서 각각 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_2C_2 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 = 1 \times 4 \times 3 = 12$$

- (ii) b 에서 2개, a , c 에서 각각 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 = 6 \times 2 \times 3 = 36$$

- (iii) c 에서 2개, a , b 에서 각각 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_2C_1 \times {}_4C_1 = 3 \times 2 \times 4 = 24$$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 평행사변형이 아닌 사다리꼴의 개수는

$$12 + 36 + 24 = 72$$

답 ③

- 16 (i) 쌍둥이를 둘 다 초대하는 경우의 수

나머지 6명의 친구 중에서 3명을 초대하면 되므로

$${}_6C_3 = 20$$

- (ii) 쌍둥이를 둘 다 초대하지 않는 경우의 수

나머지 6명의 친구 중에서 5명을 초대하면 되므로

$${}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$20 + 6 = 26$$

답 ②

- 17 9개의 점 중에서 서로 다른 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$${}_9C_3 = 84$$

같은 직선 위에 있는 3개의 점을 택하는 경우의 수는

$$4 \times {}_3C_3 = 4$$

따라서 삼각형의 개수는

$$84 - 4 = 80$$

답 ⑤

- 18 ${}_{12}C_{r+3} = {}_{12}C_{4r-1}$ ㉠

$${}_nC_3 + {}_nC_{r+1} = 2 \times {}_n C_{r-1} \quad \text{..... ㉡}$$

㉠에서 $r+3=4r-1$ 또는 $12-(r+3)=4r-1$

$$3r=4 \text{ 또는 } 5r=10$$

$$\therefore r=2 \quad (\because r \text{는 자연수})$$

..... ①

이것을 ㉡에 대입하면 ${}_{12}C_5 = {}_{12}C_7$ 을 만족시킨다.

$r=2$ 를 ㉡에 대입하면

$${}_nC_3 + {}_nC_3 = 2 \times {}_n C_1$$

$$2 \times {}_nC_3 = 2 \times {}_n C_1, \quad {}_nC_3 = {}_n C_1, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = 2n$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{3!} = 2 \quad (\because n \text{은 자연수}), \quad (n-1)(n-2) = 12$$

$$n^2 - 3n - 10 = 0, \quad (n+2)(n-5) = 0$$

$$\therefore n=5 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

..... ②

이때 $n=5$, $r=2$ 를 ㉡에 대입하면

$${}_5C_3 + {}_5C_3 = 2 \times {}_{10}C_1 \text{을 만족시킨다.}$$

$$\therefore n+r=5+2=7$$

..... ③

답 7

채점기준	배점
① ${}_{12}C_{r+3} = {}_{12}C_{4r-1}$ 에서 자연수 r 의 값 구하기	2
② r 의 값을 ${}_nC_3 + {}_nC_{r+1} = 2 \times {}_n C_{r-1}$ 에 대입하여 자연수 n 의 값 구하기	3
③ $n+r$ 의 값 구하기	1

- 19 빨간 구슬 2개를 한 개씩 넣을 주머니 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

..... ①

빈 주머니가 생기지 않도록 빨간 구슬을 넣지 않은 주머니 2개에 파란 구슬 1개씩을 넣고 남은 파란 구슬 2개를 어떤 주머니에 넣을지 결정하면 된다.

- (i) 남은 파란 구슬 2개를 주머니 1개를 택하여 한꺼번에 넣는 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

- (ii) 남은 파란 구슬 2개를 서로 다른 주머니 2개를 택하여 하나씩 넣는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

..... ②

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$6 \times (4 + 6) = 60$$

..... ③

답 60

채점기준	배점
① 빨간 구슬을 넣을 주머니를 택하는 경우의 수 구하기	2
② 파란 구슬을 넣을 주머니를 택하는 경우의 수 구하기	3
③ 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기	2

수능형 기출문제 & 변형문제

p.96~98

- 1 (i) 서로 다른 세 종류의 인형을 각각 1개, 2개, 2개 선택하는 경우의 수

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 세 종류의 인형을 선택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = 4$$

세 종류의 인형 중에서 1개를 선택할 인형의 종류를 정하는 경우의 수는 — 남은 두 종류의 인형은 각각 2개씩 선택하면 된다.

$${}_3C_1 = 3 \text{이므로}$$

$$4 \times 3 = 12$$

- (ii) 서로 다른 네 종류의 인형을 각각 1개, 1개, 1개, 2개 선택하는 경우의 수

서로 다른 네 종류의 인형 중에서 2개를 선택할 인형의 종류를 정하면 남은 세 종류의 인형은 각각 1개씩 선택하면 되므로

$${}_4C_1 = 4$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12 + 4 = 16$$

답 16

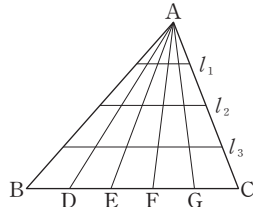
- 2 전체 9장의 손수건 중에서 4장의 손수건을 꺼내는 경우의 수는

$${}_9C_4 = 126$$

- (i) 흰색 손수건 1장과 검은색 손수건 3장을 꺼내는 경우의 수는
 ${}_4C_1 \times {}_5C_3 = 4 \times 10 = 40$
- (ii) 검은색 손수건만 4장을 꺼내는 경우의 수는
 ${}_5C_4 = 5$
- (i), (ii)에서 흰색 손수건을 1장 이하로 꺼내는 경우의 수는
 $40 + 5 = 45$
- 따라서 구하는 경우의 수는
 $126 - 45 = 81$

답 ④

3



- 6개의 선분 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중에서 2개, 4개의 선분 l_1, l_2, l_3, BC 중에서 1개의 선분을 택하면 삼각형이 만들어진다.
- 따라서 구하는 삼각형의 개수는
 ${}_6C_2 \times {}_4C_1 = 15 \times 4 = 60$

답 ④

- 4 꼭짓점 C를 지나는 선분 중 선분 BC를 제외한 5개의 선분 중에서 2개, 꼭짓점 B를 지나는 선분 중 선분 BC를 제외한 5개의 선분 중에서 2개를 택하면 사각형이 만들어진다.
- 따라서 만들 수 있는 사각형의 개수는
 ${}_5C_2 \times {}_5C_2 = 10 \times 10 = 100$

답 100

- 5 꽃 4송이와 초콜릿 2개를 합하면 6개이고, 학생은 5명이므로 학생 1명은 2개를 받고, 나머지 4명은 1개씩을 받게 된다.
- (i) 2개를 받는 학생이 꽃 2송이를 받는 경우의 수
 꽃 2송이를 받을 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1 = 5$
 이 학생에게 줄 꽃 4송이 중 2송이를 택하는 경우의 수는
 ${}_4C_2 = 6$
 남은 꽃 2송이를 나머지 4명의 학생 중 2명에게 하나씩 나누어 주는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$
 나머지 2명의 학생에게 같은 종류의 초콜릿 2개를 하나씩 나누어 주는 경우의 수는 1이므로
 $5 \times 6 \times 12 \times 1 = 360$
- (ii) 2개를 받는 학생이 초콜릿 2개를 받는 경우의 수
 초콜릿 2개를 받을 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1 = 5$
 남은 4송이의 꽃을 나머지 4명의 학생에게 하나씩 나누어 주는 경우의 수는 $4! = 24$ 이므로
 $5 \times 24 = 120$
- (iii) 2개를 받는 학생이 꽃 1송이, 초콜릿 1개를 받는 경우의 수
 꽃 1송이와 초콜릿 1개를 받을 학생을 정하는 경우의 수는
 ${}_5C_1 = 5$
 이 학생에게 꽃 4송이 중 1송이, 초콜릿 1개를 주는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

남은 꽃 3송이와 초콜릿 1개, 총 4개를 나머지 4명의 학생에게 하나씩 나누어 주는 경우의 수는 $4! = 24$ 이므로
 $5 \times 4 \times 24 = 480$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
 $360 + 120 + 480 = 960$

답 960

- 6 삼각김밥과 음료수를 합하면 5개이고, 학생은 4명이므로 학생 1명은 2개를 받고, 나머지 3명은 1개씩을 받게 된다.
- (i) 2개를 받는 학생이 삼각김밥 2개를 받는 경우의 수
 삼각김밥 2개를 받을 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$
 이 학생에게 삼각김밥 2개를 모두 주는 경우의 수는 1
 나머지 3명의 학생에게 같은 종류의 음료수 3병을 하나씩 나누어 주는 경우의 수는 1이므로
 $4 \times 1 \times 1 = 4$
- (ii) 2개를 받는 학생이 음료수 2병을 받는 경우의 수
 음료수 2병을 받을 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$
 남은 삼각김밥 2개, 음료수 1병을 나머지 3명의 학생에게 하나씩 나누어 주는 경우의 수는 $3! = 6$ 이므로
 $4 \times 6 = 24$
- (iii) 2개를 받는 학생이 삼각김밥 1개, 음료수 1병을 받는 경우의 수
 삼각김밥 1개, 음료수 1병을 받을 학생을 정하는 경우의 수는
 ${}_4C_1 = 4$
 이 학생에게 삼각김밥 2개 중 1개, 음료수 1병을 주는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$
 남은 삼각김밥 1개를 나머지 3명의 학생 중 1명에게 주는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$
 남은 음료수 2병을 나머지 2명의 학생에게 하나씩 나누어 주는 경우의 수는 1이므로
 $4 \times 2 \times 3 \times 1 = 24$
- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
 $4 + 24 + 24 = 52$

답 52

IV 행렬

1 행렬과 그 연산

교과서 예제

p.101

01 답 (1) -1 (2) 5 (3) 8 (4) 7 (5) $a_{11}=4, a_{22}=2$

02 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 에서

$$a_{11}=1-2 \times 1=-1, a_{12}=1-2 \times 2=-3,$$

$$a_{21}=2-2 \times 1=0, a_{22}=2-2 \times 2=-2$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{답} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

03 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$(1) a-1=5, 6=b+2$$

$$\therefore a=6, b=4$$

$$(2) a+b=-1, -5=-a+2b$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-2 \quad \text{답} (1) a=6, b=4 \quad (2) a=1, b=-2$$

04 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a-3b=5, 1=3c-2, 5=a-3b, a=2$$

$$\therefore a=2, b=-1, c=1 \quad \text{답} a=2, b=-1, c=1$$

05 (1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+1 \\ 1+1 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 & 2-1 \\ -3-4 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3+1-(-2) & 2+3-1 \\ -1+2-5 & 7+(-1)-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2-4+2 & 3-(-2)+1 & 4-3+2 \\ 6-1+(-1) & 0-7+3 & -5-5+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & -4 & -9 \end{pmatrix}$$

답 (1) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$
 (3) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 4 & -4 & -9 \end{pmatrix}$

06 (1) $2A = 2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $-3A = -3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$

07 (1) $(2 \quad -3) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= (2 \times (-1) + (-3) \times 0 \quad 2 \times 2 + (-3) \times 1)$$

$$= (-2 \quad 1)$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-1) \times 1 \\ 3 \times 2 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 3 + 2 \times 2 & 5 \times (-1) + 2 \times 4 \\ 2 \times 3 + 0 \times 2 & 2 \times (-1) + 0 \times 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 19 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

답 (1) $(-2 \quad 1)$ (2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 19 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

08 (1) $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (n 은 자연수)이므로 $A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

09 (1) $E^2 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $-E^7 = -E = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $(-E)^{303} = -E^{303} = -E = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

답 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

기출 Best | 1회

p.102~105

01 $a_{ij} = i + j^2 - 2$ 에서

$$a_{11} = 1 + 1^2 - 2 = 0, a_{12} = 1 + 2^2 - 2 = 3,$$

$$a_{21} = 2 + 1^2 - 2 = 1, a_{22} = 2 + 2^2 - 2 = 4$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

답 ④

02 i 도시에서 j 도시로 직접 가는 도로의 수가 a_{ij} 이므로

$$a_{11}=0, a_{12}=1, a_{13}=1,$$

$$a_{21}=1, a_{22}=0, a_{23}=1,$$

$$a_{31}=2, a_{32}=0, a_{33}=1$$

따라서 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로 행렬 A 의 제2행의 모든 성분의

합은

$$1+0+1=2$$

답 ②

03 $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4-2c & 3 \end{pmatrix}$ 에서 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a+b=2, a-b=6, -6=4-2c$$

$$a+b=2, a-b=6 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$a=4, b=-2$$

$$-6=4-2c \text{에서}$$

$$2c=10 \quad \therefore c=5$$

$$\therefore abc=4 \times (-2) \times 5 = -40$$

답 ①

04 $3(A+B)-2(A-2B)=3A+3B-2A+4B$

$$=A+7B$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & -7 \\ 7 & -14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 22 & -9 \\ 9 & -11 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$22+(-9)+9+(-11)=11$$

답 ②

05 $2A+B+2X=3A-2B+3X$ 에서

$$X=-A+3B$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X 의 $(1, 2)$ 성분은 -5 이다.

답 ①

06 $xA+yB=C$ 에서

$$x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+2y & 2x+3y \\ y & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x+2y=1, 2x+3y=3, y=-1, x+y=2$$

$$\therefore x=3, y=-1$$

$$\therefore x^2+y^2=3^2+(-1)^2=10$$

답 ④

07 $A: 2 \times 2$ 행렬, $B: 2 \times 1$ 행렬, $C: 1 \times 2$ 행렬

두 행렬의 곱셈은 앞 행렬의 열의 개수와 뒤 행렬의 행의 개수가 같을 때에만 정의되므로 행렬의 곱셈이 정의되지 않는 것은

② AC , ⑤ B^2 이다.

답 ②, ⑤

참고 ① 두 행렬 A, B 의 곱 AB 는

$$(A \text{의 열의 개수}) = (B \text{의 행의 개수})$$

일 때 정의된다.

② $A: m \times n$ 행렬, $B: n \times l$ 행렬

$$\rightarrow AB: m \times l \text{ 행렬}$$

08 $\begin{pmatrix} x & y \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ x & 2y \end{pmatrix}$ 에서

$$\begin{pmatrix} x^2 & 2xy \\ 2x & 2y+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & -4 \\ 2x & x+2y \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2=2x-1, 2xy=-4$$

$$x^2=2x-1 \text{에서 } x^2-2x+1=0$$

$$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$$

$$2xy=-4 \text{에서 } 2y=-4 \quad \therefore y=-2$$

$$\therefore x+y=1+(-2)=-1$$

답 ②

09 $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

을이 가게 Q에서 기념품을 살 때 지불해야 하는 금액은

$$c \times f + d \times h = cf + dh \text{ (원)}$$

따라서 을이 지불해야 하는 금액을 나타내는 것은 행렬 AB 의

$(2, 2)$ 성분이다.

답 ③

10 $A \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ 를 변끼리 더하면

$$A \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, A \left\{ \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}, 3A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

답 ②

다른풀이 $A \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ 에서 $2A \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\therefore A \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{또, } A \begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{에서 } A \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3b \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &A \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + 3A \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3A \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, 3A \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\therefore A \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\therefore A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \right\} = A \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \quad A+B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ A-B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \\ \therefore A^2+AB-BA-B^2 &= (A^2+AB)-(BA+B^2) \\ &= A(A+B)-B(A+B) \\ &= (A-B)(A+B) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 $A^2+AB-BA-B^2$ 의 모든 성분의 합은
 $4+(-2)+(-6)+4=0$

답 ③

$$\begin{aligned} 12 \quad (A-B)^2 &= (A-B)(A-B) = A^2-AB-BA+B^2 \text{에서} \\ AB+BA &= (A^2+B^2)-(A-B)^2 \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

답 ④

참고 행렬의 곱셈에서는 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않는다.

$$\begin{aligned} 13 \quad (A+B)^2 &= A^2+2AB+B^2 \text{에서} \\ A^2+AB+BA+B^2 &= A^2+2AB+B^2 \\ \therefore AB &= BA \\ \text{이때} \\ AB &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 1-y \\ -1+2x & -1+2y \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x-y & -x+2y \end{pmatrix} \\ \text{이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여} \\ 1-x=0, 1-y=1, -1+2x &= x-y, -1+2y = -x+2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= 1, y = 0 \\ \therefore x+y &= 1+0=1 \end{aligned}$$

답 ②

$$\begin{aligned} 14 \quad A^2 &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2a & -2 \\ -a & 2a+1 \end{pmatrix} \\ \text{행렬 } A^2 \text{의 모든 성분의 합이 } 15 \text{이므로} \\ (4+2a)+(-2)+(-a)+(2a+1) &= 15 \\ 3a+3=15, 3a=12 \quad \therefore a &= 4 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 15 \quad A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \text{이므로} \\ (E+4A)^2 &= E^2+8AE+16A^2 \\ &= E+8A+16E \\ &= 17E+8A \end{aligned}$$

따라서 $x=17, y=8$ 이므로
 $x+y=17+8=25$

답 ②

$$\begin{aligned} 16 \quad A+B=O \text{에서 } B &= -A \text{이므로} \\ AB &= E \text{에서} \\ AB &= A \times (-A) = -A^2 = E, A^2 = -E \\ \therefore A^4 &= (A^2)^2 = (-E)^2 = E^2 = E \\ \text{또, } B^2 &= (-A)^2 = A^2 = -E \text{이므로} \\ B^4 &= (B^2)^2 = (-E)^2 = E^2 = E \\ \therefore A^{600}+B^{600} &= (A^4)^{150} + (B^4)^{150} \\ &= E^{150} + E^{150} \\ &= E+E=2E \end{aligned}$$

답 ③

$$\begin{aligned} 17 \quad (A-3E)(A-2E) &= -4A+5E \text{에서} \\ A^2-5A+6E &= -4A+5E \\ \therefore A^2 &= A-E \\ \text{따라서} \\ A^3 &= A^2A = (A-E)A \\ &= A^2-A = (A-E)-A \\ &= -E \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} A^{26} &= (A^3)^8 A^2 = (-E)^8 A^2 \\ &= E^8 A^2 = A^2 = A-E \end{aligned}$$

답 ⑤

다른풀이 $A^2-A+E=O$ 이므로 양변에 $A+E$ 를 곱하면
 $(A+E)(A^2-A+E)=O$
 $A^3+E=O$
 $\therefore A^3=-E$

$$\begin{aligned} 18 \quad A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E \\ \therefore A^6 &= (A^3)^2 = (-E)^2 = E^2 = E \\ \text{따라서 } A^n &= E \text{를 만족시키는 자연수 } n \text{의 최솟값은 } 6 \text{이다.} \end{aligned}$$

답 ④

19 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 에서

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

$$A^9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}, A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A - A^2 + A^3 - \cdots + A^9 - A^{10} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ - \cdots + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -9 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1-1+1-\cdots+1-1 & 0 \\ -1+2-3+\cdots-9+10 & 1-1+1-\cdots+1-1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 $A - A^2 + A^3 - \cdots + A^9 - A^{10}$ 의 모든 성분의 합은 5이다. [답] ③

[참고] $-1+2-3+\cdots-9+10$
 $= (-1+2) + (-3+4) + (-5+6) + (-7+8) + (-9+10)$
 $= 1 \times 5 = 5$

20 $\neg, (A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$ (거짓)

$\neg, A^7 = E, A^4 = E$ 이므로
 $A^3 = EA^3 = A^4 A^3 = A^7 = E$
 $\therefore A = EA = A^3 A = A^4 = E$ (참)

$\neg, A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq O, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이면

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \text{이지만 } B \neq E \text{이다.}$$

(거짓)

따라서 옳은 것은 $\neg$ 이다. [답] ②

따라서 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ 이므로 행렬 A 의 제2열의 모든 성분의 합은 $3+5+9=17$ [답] ③

02 a_{ij} 는 i 유형의 j 회에서 얻은 수행평가 성적이므로

$$A = \begin{pmatrix} a & 12 \\ 16 & b \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

행렬 A 의 각 행의 모든 성분의 합이 서로 같으므로

$$a+12=16+b=10+15=25$$

따라서 $a=13, b=9$ 이므로

$$a+b=13+9=22$$

[답] ①

03 $\begin{pmatrix} x+y & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ xy & 5 \end{pmatrix}$ 에서 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x+y=6, -2=xy$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= 6^2 - 2 \times (-2) = 40 \end{aligned}$$

[답] ⑤

04 $-2(A-2B)+5A-2B = -2A+4B+5A-2B$

$$= 3A+2B$$

$$= 3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$3+2+(-4)+13=14$$

[답] ④

05 $-2(A+X)=3B-X$ 에서 $-2A-2X=3B-X$

$$\therefore X = -2A-3B$$

$$= -2 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -3 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X 의 모든 성분의 합은

$$-6+0+(-1)+(-8)=-15$$

[답] ①

06 $xA+yB=C$ 에서

$$x \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -7 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & x \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4y & -y \\ 0 & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -7 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

01 $a_{ij} = 2^i + (-1)^j$ 에서

$$a_{11} = 2^1 + (-1)^1 = 1, a_{12} = 2^1 + (-1)^2 = 3,$$

$$a_{21} = 2^2 + (-1)^1 = 3, a_{22} = 2^2 + (-1)^2 = 5,$$

$$a_{31} = 2^3 + (-1)^1 = 7, a_{32} = 2^3 + (-1)^2 = 9$$

$$\begin{pmatrix} 2x+4y & x-y \\ 0 & x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -7 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+4y=16, x-y=-7, x+3y=z$$

$2x+4y=16, x-y=-7$ 을 연립하여 풀면

$$x=-2, y=5$$

$$\therefore z=-2+3 \times 5=13$$

$$\therefore xy+z=(-2) \times 5+13=3$$

답 ③

07 $A: 3 \times 2$ 행렬, $B: 2 \times 2$ 행렬, $C: 2 \times 1$ 행렬

두 행렬의 곱셈은 앞 행렬의 열의 개수와 뒤 행렬의 행의 개수가 같을 때에만 정의되므로 행렬의 곱셈이 정의되는 것은

AB, AC, B^2, BC 의 4개이다.

답 ④

참고 A^2 은 행렬 A 가 정사각행렬일 때에만 정의된다.

08 $AB=O$ 에서

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & y \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2y-2 \\ -3x+24 & xy-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2y-2=0, -3x+24=0, xy-8=0$$

$$\therefore x=8, y=1$$

$$\therefore x^2+y^2=64+1=65$$

답 ③

$$09 PQ = \begin{pmatrix} 500 & 180 \\ 400 & 150 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 500 \times 2 + 180 \times 3 & 500 \times 1 + 180 \times 2 \\ 400 \times 2 + 150 \times 3 & 400 \times 1 + 150 \times 2 \end{pmatrix}$$

을 이 문구점 A에서 연필 1개와 지우개 2개를 사고 지불해야 할 금액은 $500 \times 1 + 180 \times 2$ (원)

따라서 을 이 지불해야 할 금액을 나타내는 것은 행렬 PQ의

(1, 2) 성분이다.

답 ②

$$10 A \begin{pmatrix} 2a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} a \\ 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{을 변끼리 더하면}$$

$$A \begin{pmatrix} 2a \\ -b \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} a \\ 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \left[\begin{pmatrix} 2a \\ -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 4b \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, 3A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

답 ④

$$11 A+C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$ABC+CBC=(A+C)BC$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

답 ①

$$\text{다른풀이 } BC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$ABC+CBC=(A+C)BC=(A+C)(BC)$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$12 (A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$$

$$= (A^2 + AB + BA + B^2) - 2(AB + BA)$$

$$= (A+B)^2 - 2(AB + BA)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & -14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 15 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $(A-B)^2$ 의 모든 성분의 합은

$$3 + (-2) + 2 + 15 = 18$$

답 ①

$$13 (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \text{에서}$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

$$-AB + BA = O \quad \therefore AB = BA$$

이때

$$AB = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & -x-3y \\ 1 & -1-3y \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-1 & -1 \\ x+3y & -1-3y \end{pmatrix}$$

이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

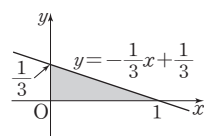
$$-x-3y=-1, 1=x+3y$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

따라서 직선 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ 과 x 축 및 y

축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



답 ②

$$14 A+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \dots\dots ㉠$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①+②을 하면

$$2A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

①-②을 하면

$$2B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \therefore B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^2-B^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 A^2-B^2 의 (2, 2) 성분은 0이다. 답 ②

참고 $(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & 4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

이므로 $A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$ 이다.

일반적으로 행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않는다.

15 $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$ 이므로

$$\begin{aligned} (A+E)(A^2-A+E) &= (A+E)(A^2-AE+E^2) \\ &= A^3+E^3 \\ &= A+E \quad (\because A^3=A^2A=EA=A) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 $(A+E)(A^2-A+E)$ 의 모든 성분의 합은

$$0+2+0+2=4 \quad \text{답 ⑤}$$

16 $A+B=3E$ 에서 $B=3E-A$ 이므로

$$AB=E \text{에서 } A(3E-A)=E, 3A-A^2=E$$

$$\therefore A^2=3A-E$$

또, $A+B=3E$ 에서 $A=3E-B$ 이므로

$$AB=E \text{에서 } (3E-B)B=E, 3B-B^2=E$$

$$\therefore B^2=3B-E$$

따라서

$$\begin{aligned} A^2+B^2 &= (3A-E)+(3B-E) \\ &= 3(A+B)-2E \\ &= 3 \times 3E-2E=7E \end{aligned}$$

이므로 $k=7$

다른풀이 $B=3E-A$ 이므로

$$AB=A(3E-A)=3A-A^2$$

$$BA=(3E-A)A=3A-A^2$$

$$\therefore AB=BA \quad \text{— 곱셈에 대한 교환법칙 성립}$$

이때 $A+B=3E, AB=E$ 이므로

$$\begin{aligned} A^2+B^2 &= (A+B)^2-2AB \\ &= (3E)^2-2E=9E-2E=7E \end{aligned}$$

$$\therefore k=7$$

17 $(A-E)(A-8E)=-7A+4E$ 에서

$$A^2-9A+8E=-7A+4E$$

$$\therefore A^2=2A-4E$$

따라서

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2A = (2A-4E)A = 2A^2-4A \\ &= 2(2A-4E)-4A = 4A-8E-4A = -8E \end{aligned}$$

이므로

$$A^{30}=(A^3)^{10}=(-8E)^{10}=8^{10}E \quad \text{답 ③}$$

다른풀이 $A^2-2A+4E=O$ 이므로 양변에 $A+2E$ 를 곱하면

$$(A+2E)(A^2-2A+4E)=O$$

$$A^3+8E=O \quad \therefore A^3=-8E$$

18 $A^2=AA=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$$\therefore A^8=(A^4)^2=(-E)^2=E^2=E$$

따라서 $A^n=E$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 8이다. 답 ⑤

19 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 에서

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

$$A^{19}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 19 & 1 \end{pmatrix}, A^{20}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A-A^2+A^3-\dots+A^{19}-A^{20}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \dots + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 19 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1-1+1-\dots+1-1 & 0 \\ 1-2+3-\dots+19-20 & 1-1+1-\dots+1-1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A-A^2+A^3-\dots+A^{19}-A^{20}$ 의 모든 성분의 합은 -10이다. 답 ②

참고 $1-2+3-\dots+19-20$

$$=(1-2)+(3-4)+\dots+(19-20)$$

$$=-1 \times 10 = -10$$

- 20 $\neg$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이면
 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이지만 $A \neq O$, $B \neq O$ 이
 다. (거짓)
 $\neg$. $A = O$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 이면 $AB = AC = O$ 이지
 만 $B \neq C$ 이다. (거짓)
 $\neg$. $AB = BA$ 이므로
 $A^2B^2 = AAB B = ABAB = (AB)^2$ (참)
 따라서 옳은 것은 $\neg$ 이다. 답 ③

변형유형 집중공략

p.110~111

- 1-1 $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ㉠
 $A+2B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ ㉡
 ㉠-㉡을 하면
 $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$
 ㉠에서
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$
 따라서
 $A-B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$
 이므로 행렬 $A-B$ 의 모든 성분의 곱은
 $3 \times 2 \times (-5) \times 13 = -390$ 답 ②
- 1-2 $3X+Y = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$ ㉠
 $X-2Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$ ㉡
 ㉠ $\times 2$ +㉡을 하면
 $7X = 2 \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$, $7X = \begin{pmatrix} 0 & 14 \\ 14 & -21 \end{pmatrix}$
 $\therefore X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 0 & 14 \\ 14 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
 ㉡에서
 $Y = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} - 3X = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
 이므로
 $X+Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 답 ④

- 2-1 $A+B = -2E$ 에서 $B = -A-2E$ 이므로
 $AB = O$ 에서 $A(-A-2E) = O$
 $-A^2-2A = O \quad \therefore A^2 = -2A$
 또, $A+B = -2E$ 에서 $A = -B-2E$ 이므로
 $AB = O$ 에서 $(-B-2E)B = O$
 $-B^2-2B = O \quad \therefore B^2 = -2B$
 $\therefore A^3+B^3 = A^2A+B^2B = (-2A)A+(-2B)B$
 $= -2A^2-2B^2 = -2 \times (-2A) - 2 \times (-2B)$
 $= 4A+4B = 4(A+B)$
 $= 4 \times (-2E) = -8E$
 $= \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$
 따라서 행렬 A^3+B^3 의 모든 성분의 합은
 $-8+0+0+(-8) = -16$ 답 -16
- 다른풀이 $A+B = -2E$ 에서 $B = -A-2E$ 이므로
 $AB = A(-A-2E) = -A^2-2A$
 $BA = (-A-2E)A = -A^2-2A$
 $\therefore AB = BA$
 즉, 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하므로 곱셈 공식을 이용할 수
 있다.
 $\therefore A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)$
 $= -2E(A^2-O+B^2)$
 $= -2(A^2+B^2) = -2\{(A+B)^2-2AB\}$
 $= -2\{(-2E)^2-2O\}$
 $= -2 \times 4E^2 = -8E$
- 2-2 $A+B = E$ 에서 $B = E-A$ 이므로
 $AB = A(E-A) = A-A^2$
 $BA = (E-A)A = A-A^2$
 $\therefore AB = BA$
 즉, 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하므로 곱셈 공식을 이용할 수
 있다.
 $A^3+B^3 = \frac{17}{2}E$ 에서
 $(A+B)^3-3AB(A+B) = \frac{17}{2}E$
 $E^3-3ABE = \frac{17}{2}E$, $E-3AB = \frac{17}{2}E$
 $3AB = -\frac{15}{2}E \quad \therefore AB = -\frac{5}{2}E$ 답 ①

서술형 What & How

p.112~115

- 1 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
 $a+2b=7$, $1=a-b$, $2c+d=-3$, $-3=c-d$ ①

$a+2b=7$, $1=a-b$ 를 연립하여 풀면

$$a=3, b=2 \quad \dots\dots ②$$

$2c+d=-3$, $-3=c-d$ 를 연립하여 풀면

$$c=-2, d=1 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore abcd=3 \times 2 \times (-2) \times 1 = -12 \quad \dots\dots ④$$

답 -12

2 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a-b=4, x=a^2+b^2, y=a^3-b^3, ab=1 \quad \dots\dots ①$$

이므로

$$\begin{aligned} x &= a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab \\ &= 4^2 + 2 \times 1 = 18 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) \\ &= 4^3 + 3 \times 1 \times 4 = 76 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

$$\therefore x+y=18+76=94 \quad \dots\dots ④$$

답 94

채점기준	배점
① 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 등식 세우기	1
② x 의 값 구하기	2
③ y 의 값 구하기	2
④ $x+y$ 의 값 구하기	1

3 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ 에서

$$A^2-B^2=A^2-AB+BA-B^2, O=-AB+BA \quad \dots\dots ①$$

$$\therefore AB=BA \quad \dots\dots ①$$

이때

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y \\ x & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & y+12 \\ 2x & 3y+12 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & y \\ x & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y & 2y \\ x+18 & 2x+12 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ②$$

이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2x=3y, y+12=2y, 2x=x+18, 3y+12=2x+12$$

$$y+12=2y \text{에서 } y=12$$

$$2x=x+18 \text{에서 } x=18 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore x+y=18+12=30 \quad \dots\dots ④$$

답 30

4 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ 에서

$$(A-B)(A-B)=A^2-2AB+B^2$$

$$A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2$$

$$-AB-BA=-2AB \quad \therefore AB=BA \quad \dots\dots ①$$

이때

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ a & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -1 \\ b+1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b-3 & -4 \\ ab-2b-2 & -a-2 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} b & -1 \\ b+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ a & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b & -3b+2 \\ a+b+1 & -3b-5 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ②$$

이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-2b-3=-a+b, -4=-3b+2,$$

$$ab-2b-2=a+b+1, -a-2=-3b-5$$

$$-4=-3b+2 \text{에서 } 3b=6 \quad \therefore b=2$$

$$-2b-3=-a+b \text{에서 } a=3b+3=3 \times 2+3=9 \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore ab=9 \times 2=18 \quad \dots\dots ④$$

답 18

채점기준	배점
① $AB=BA$ 임을 설명하기	2
② AB, BA 구하기	3
③ a, b 의 값 구하기	2
④ ab 의 값 구하기	1

5 $(A+E)^2=3A+4E$ 에서 $A^2+2A+E=3A+4E$

$$\therefore A^2=A+3E \quad \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore (A+E)^3 &= (A+E)^2(A+E) = (3A+4E)(A+E) \\ &= 3A^2+7A+4E = 3(A+3E)+7A+4E \\ &= 10A+13E \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

따라서 $10A+13E=aA+bE$ 이므로

$$(10-a)A=(b-13)E$$

A 는 E 의 실수배가 아니므로

$$10-a=0, b-13=0$$

$$\therefore a=10, b=13$$

$$\therefore a+b=10+13=23 \quad \dots\dots ③$$

답 23

6 $(A+E)^2=mA-2E$ 에서 $A^2+2A+E=mA-2E$

$$\therefore A^2=(m-2)A-3E \quad \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} \therefore (A+E)^3 &= (A+E)^2(A+E) \\ &= (mA-2E)(A+E) \\ &= mA^2+(m-2)A-2E \\ &= m\{(m-2)A-3E\}+(m-2)A-2E \\ &= (m^2-m-2)A+(-3m-2)E \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

이때 $(A+E)^3=-8E$ 이므로

$$(m^2-m-2)A+(-3m-2)E=-8E$$

$$\therefore (m^2-m-2)A=(3m-6)E \quad \dots\dots ⑦ \quad \dots\dots ③$$

행렬 A 는 단위행렬의 실수배가 아니므로

$$m^2-m-2=0, 3m-6=0 \quad \dots\dots ④$$

$$m^2-m-2=0 \text{에서 } (m+1)(m-2)=0$$

$$\therefore m=-1 \text{ 또는 } m=2 \quad \dots\dots ㉔$$

$$3m-6=0 \text{에서 } 3m=6 \quad \therefore m=2 \quad \dots\dots ㉕$$

$$㉔, ㉕ \text{에서 } m=2 \quad \dots\dots ⑤$$

답 2

참고 ⑦에서 $m^2-m-2 \neq 0$ 이면 $A = \frac{3m-6}{m^2-m-2}E$, 즉 행렬

A 가 단위행렬의 실수배가 되므로 행렬 A 가 단위행렬의 실수배가 아니라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $m^2-m-2=0$ 이고, ⑦에서 $(3m-6)E=O$ 이므로

$$3m-6=0 \text{이다.}$$

채점기준	배점
① A^2 을 A 와 E 에 대한 일차식으로 나타내기	2
② $(A+E)^3$ 을 A 와 E 에 대한 일차식으로 나타내기	2
③ A 와 E 에 대한 등식 세우기	1
④ 주어진 조건을 만족시키는 실수 m 의 조건 구하기	1
⑤ m 의 값 구하기	2

7 $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$
 $B^4 = (B^2)^2 = (-E)^2 = E^2 = E$ ①
 $\therefore B + B^5 + B^9 = B + B^4 B + (B^4)^2 B = B + EB + E^2 B$
 $= B + B + B = 3B$
 $= 3 \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ ②
따라서 행렬 $B + B^5 + B^9$ 의 모든 성분의 합은
 $6 + 15 + (-3) + (-6) = 12$ ③
답 12

8 $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$
 $A^4 = (A^2)^2 = (-E)^2 = E^2 = E$ ①
 $A^{3000} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ 에서
 $A^{3000} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = (A^4)^{750} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = E^{750} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ ②
따라서 $p = -2, q = 7$ 이므로
 $p + q = (-2) + 7 = 5$ ③
답 5

채점기준	배점
① A^2, A^4 구하기	2
② 행렬 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 구하기	3
③ $p+q$ 의 값 구하기	1

실전 문제 | 1회

p.116~119

01 $3A + B = E$ 에서
 $B = E - 3A$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 15 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 7 & -15 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$
따라서 행렬 B 의 모든 성분의 합은
 $7 + (-15) + (-9) + (-2) = -19$ ①
답 ①

02 두 행렬이 서로 같은 조건에 의하여
 $a + 2b = b + 5, 2 - ab = -3$
 $\therefore a + b = 5, ab = 5$
 $\therefore (a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 5^2 - 4 \times 5 = 5$ ①
답 ①

03 행렬 A 는 $a_{12} = a_{21}$, 즉 행렬의 $(1, 2)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분이 서로 같은 행렬이므로 행렬 A 가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

04 $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$
 $A^4 = (A^2)^2 = (-E)^2 = E^2 = E$
 $\therefore A^{1000} = (A^4)^{250} = E^{250} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
따라서 행렬 A^{1000} 의 모든 성분의 합은
 $1 + 0 + 0 + 1 = 2$ ⑤
답 ⑤

05 $A^2 B - A = A(AB - E)$
 $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
 $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
 $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ③
답 ③

06 $X + 2Y = A$ ㉠
 $2X - Y = B$ ㉡
㉠ + ㉡ $\times 2$ 를 하면
 $5X = A + 2B$
 $= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$
 $\therefore X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
㉡에서
 $Y = 2X - B$
 $= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
따라서
 $X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
이므로 $a = 3, b = -1, c = -2, d = -1$
 $\therefore a + b + c + d = 3 + (-1) + (-2) + (-1) = -1$ ④
답 ④

07 $A+B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이고

$AC+BC=E$ 에서 $(A+B)C=E$ 이므로

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x+y=0, y=1 \quad \therefore x=-1$$

$$\therefore xy=(-1) \times 1 = -1$$

답 ①

08 $A^2-2A=E$ 의 양변의 오른쪽에 B 를 곱하면

$$(A^2-2A)B=B, A^2B-2AB=B$$

$$AAB-2AB=B, A(3E)-2(3E)=B$$

$$\therefore 3A-6E=B$$

$$\therefore B^2=(3A-6E)^2=9A^2-36A+36E$$

$$=9(2A+E)-36A+36E$$

$$=18A+9E-36A+36E$$

$$=-18A+45E$$

답 ⑤

09 $(A-B)^2=(A-B)(A-B)=A^2-AB-BA+B^2$ 에서

$$A^2+B^2=(A-B)^2+AB+BA$$

$$=(A-B)(A-B)+AB+BA$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

답 ①

10 $A\begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 3a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ 을 변끼리 더하면

$$A\begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} 3a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\left[\begin{pmatrix} a \\ 3b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3a \\ b \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} 4a \\ 4b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, 4A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

답 ①

11 $A^2=2A-4E$ 에서 $A^2-2A+4E=O$ 이므로

양변에 $A+2E$ 를 곱하면

$$(A+2E)(A^2-2A+4E)=O$$

$$A^3+8E=O \quad \therefore A^3=-8E$$

$$\therefore A^9=(A^3)^3=(-8E)^3=-8^3E^3=-512E$$

$$=-512\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -512 & 0 \\ 0 & -512 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^9 의 모든 성분의 합은

$$(-512)+0+0+(-512)=-1024$$

답 ①

다른풀이 $A^3=A^2A=(2A-4E)A$

$$=2A^2-4A=2(2A-4E)-4A=-8E$$

$$\therefore A^9=(A^3)^3=(-8E)^3=-8^3E^3=-512E$$

12 $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$$A^6=A^3A^3=(-E)(-E)=E^2=E$$
이므로

$$A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=A+A^2-E-A-A^2+E=O$$

$$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^{20}$$

$$=(A+A^2+\cdots+A^6)+A^6(A+A^2+\cdots+A^6)$$

$$+A^{12}(A+A^2+\cdots+A^6)+A^{19}+A^{20}$$

$$=O+O+O+A^{18}(A+A^2)=A^{18}(A+A^2)$$

$$=(A^6)^3(A+A^2)=A+A^2$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A+A^2+A^3+\cdots+A^{20}$ 의 $(2, 1)$ 성분은 -6 이다.

답 ②

13 $\neg. A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이면 $A^2=B^2=E$ 이지만

$A \neq B$ 이고 $A \neq -B$ 이다. (거짓)

$$\neg. (A+E)(A-E)=E \text{에서 } A^2-E^2=E$$

$$A^2-E=E \quad \therefore A^2=2E$$

$$\text{따라서 } A^2B=2EB=2B, BA^2=B(2E)=2B \text{이므로}$$

$$A^2B=BA^2 \text{ (참)}$$

$$\neg. A^3+A^2+A+E=O \text{에서 } A^3=-A^2-A-E \text{이므로}$$

$$A^4=A^3A=(-A^2-A-E)A$$

$$=-A^3-A^2-A$$

$$=-(-A^2-A-E)-A^2-A=E \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \vdash$ 이다.

답 ④

다른풀이 $\neg. A^3+A^2+A+E=O$ 의 양변에 $A-E$ 를 곱하면

$$(A-E)(A^3+A^2+A+E)=O$$

$$A^4+A^3+A^2+A-A^3-A^2-A-E=O$$

$$A^4-E=O \quad \therefore A^4=E$$

14 $A-B=E$ 에서 $B=A-E$ 이므로

$$AB=A(A-E)=A^2-A$$

$$BA=(A-E)A=A^2-A$$

$$\therefore AB=BA$$

즉, 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하므로

$$A^3-B^3=(A-B)^3+3AB(A-B)$$

$$A^3-B^3=E^3+3ABE, A^3-B^3=E+3AB$$

$$3AB = A^3 - B^3 - E$$

$$\therefore AB = \frac{1}{3}(A^3 - B^3 - E)$$

$$= \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 AB 의 모든 성분의 합은

$$2 + (-1) + (-2) + 2 = 1$$

답 ⑤

15 $A^2 + 4A - 12E = O$ 에서

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + 4a + b - 12 & ab + 7b \\ a + 7 & b + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2 + 4a + b - 12 = 0, ab + 7b = 0, a + 7 = 0, b + 9 = 0$$

$$\therefore a = -7, b = -9$$

이때 $A^2 = -4A + 12E$ 이므로

$$A^3 = A^2 A = (-4A + 12E)A$$

$$= -4A^2 + 12A = -4(-4A + 12E) + 12A$$

$$= 28A - 48E$$

$$\therefore A^3 + 3A^2 - 14A + 13E$$

$$= (28A - 48E) + 3(-4A + 12E) - 14A + 13E$$

$$= 2A + E$$

$$= 2 \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & -18 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A^3 + 3A^2 - 14A + 13E$ 의 모든 성분의 합은

$$-13 + (-18) + 2 + 7 = -22$$

답 ③

16 올해 A사와 B사의 IPTV 시장 점유율을 각각 a_1, b_1 이라 하면

$$a_1 = 0.7a_0 + 0.4b_0$$

$$b_1 = 0.3a_0 + 0.6b_0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

내년 A사와 B사의 IPTV 시장 점유율을 각각 a_2, b_2 라 하면

$$a_2 = 0.7a_1 + 0.4b_1$$

$$b_2 = 0.3a_1 + 0.6b_1$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.61 & 0.52 \\ 0.39 & 0.48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

답 ④

17 따뜻한 커피 한 잔을 만들 때 드는 원가를 a 원이라 하면

$$60 \times 20 + 10 \times 5 = a$$

차가운 커피 한 잔을 만들 때 드는 원가를 b 원이라 하면

$$40 \times 20 + 15 \times 5 = b$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 60 & 10 \\ 40 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

따라서 따뜻한 커피와 차가운 커피를 각각 한 잔씩 만들 때 드는 원가를 계산하는 행렬의 곱은 AC 이다.

답 ②

18 이차방정식 $x^2 + 6x + 4 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -6, \alpha\beta = 4 \quad \dots\dots ①$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha^2 + 1 & -\alpha - \beta \\ -\alpha - \beta & 1 + \beta^2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ②$$

따라서 행렬 A^2 의 모든 성분의 합은

$$(\alpha^2 + 1) + (-\alpha - \beta) + (-\alpha - \beta) + (1 + \beta^2)$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2) - 2(\alpha + \beta) + 2$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 2$$

$$= (-6)^2 - 2 \times 4 - 2 \times (-6) + 2$$

$$= 42$$

..... ③

답 42

채점기준	배점
① 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β 에 대한 관계식 세우기	1
② 행렬 A^2 구하기	2
③ 행렬 A^2 의 모든 성분의 합 구하기	3

19 $A^2 - 6A + 10E = O$ 에서

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 - b^2 - 6a + 10 & 2ab - 6b \\ -2ab + 6b & a^2 - b^2 - 6a + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ①$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2 - b^2 - 6a + 10 = 0, 2ab - 6b = 0, -2ab + 6b = 0$$

$$2ab - 6b = 0 \text{에서 } 2b(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } b = 0 \quad \dots\dots ②$$

(i) $a = 3$ 일 때

$$a^2 - b^2 - 6a + 10 = 0 \text{에서 } 9 - b^2 - 18 + 10 = 0$$

$$b^2 = 1 \quad \therefore b = \pm 1 \quad \dots\dots ③$$

(ii) $b = 0$ 일 때

$$a^2 - b^2 - 6a + 10 = 0 \text{에서 } a^2 - 6a + 10 = 0$$

$$\text{그런데 } a^2 - 6a + 10 = (a - 3)^2 + 1 > 0 \text{이므로}$$

$a^2 - 6a + 10 = 0$ 을 만족시키는 실수 a 의 값은 존재하지 않는다. ④

(i), (ii)에서 $a = 3, b = 1$ 또는 $a = 3, b = -1$

따라서 실수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(3, 1), (3, -1)$ 의 2개이다. ⑤

답 2

채점기준	배점
① 행렬 A 를 주어진 관계식에 대입하여 나타내기	2
② 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 $a=3$ 또는 $b=0$ 임을 알아내기	2
③ $a=3$ 일 때 b 의 값 구하기	1
④ $b=0$ 일 때 실수 a 의 값이 존재하지 않음을 설명하기	2
⑤ 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기	1

실전 문제 | 2회

p.120~123

01 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 에서

$$a_{11} = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$a_{12} = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$a_{21} = -2^2 + 2 \times 1 = -2$$

$$a_{22} = 2 \times 2 + 1 = 5$$

따라서 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ 이므로 행렬 A 의 모든 성분의 합은

$$3 + 5 + (-2) + 5 = 11$$

답 ⑤

02 $3(X-A) = 4(X-B)$ 에서

$$3X - 3A = 4X - 4B$$

$$\therefore X = -3A + 4B$$

$$= -3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 17 & 5 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X 의 모든 성분의 합은

$$-2 + 1 + 17 + 5 = 21$$

답 ⑤

03 $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 3 \end{pmatrix}$ 에서

$$\begin{pmatrix} 5x+3y \\ 4x+xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+3 \\ 4x-18 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$5x+3y=4x+3, 4x+xy=4x-18$$

$$\therefore x=3-3y \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$xy=-18 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(3-3y)y=-18, (1-y)y=-6$$

$$y-y^2=-6, y^2-y-6=0$$

$$(y+2)(y-3)=0 \quad \therefore y=-2 \text{ 또는 } y=3$$

이것을 각각 ①에 대입하면

$$y=-2 \text{ 일 때 } x=9$$

$$y=3 \text{ 일 때 } x=-6$$

$$\text{따라서 } x^2+y^2=9^2+(-2)^2=85 \text{ 또는}$$

$$x^2+y^2=(-6)^2+3^2=45$$

이므로 x^2+y^2 의 최솟값은 45이다.

답 ①

04 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & -6 \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB - BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 10 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 14 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $AB - BA$ 의 $(2, 1)$ 성분은 14이다.

답 ②

05 갑이 맞힌 3점짜리 문항의 개수가 x , 4점짜리 문항의 개수가 y 이고, 갑이 26문항을 맞혔으므로

$$x+y=26$$

갑이 86점을 받았으므로

$$3x+4y=86$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 86 \end{pmatrix}$$

따라서 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 이므로 행렬 A 의 모든 성분의 합은

$$1+1+3+4=9$$

답 ④

06 $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ 이므로

$$A^2+AB+BA+B^2=A(A+B)+B(A+B)$$

$$=(A+B)(A+B)$$

$$=(A+B)^2$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

답 ③

07 실수 m, n 에 대하여 $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 이라 하면

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-n \\ m+n \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$m-n=3, m+n=5 \text{ 이므로 두 식을 연립하여 풀면}$$

$$m=4, n=1$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} &= A \left\{ 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= 4A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 $a=9$, $b=3$ 이므로

$$a+b=9+3=12$$

답 ⑤

다른풀이 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \dots\dots ㉠$

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \dots\dots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, 2A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

㉠-㉡을 하면

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, A \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, 2A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} &= A \left\{ 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= 3A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

08 $x^3=1$ 에서 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$ 이므로 ω 는 이차방

정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이다. 즉,

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

$$\begin{aligned} \therefore A^2 &= \begin{pmatrix} \omega^2 & 1 \\ -1 & \omega+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^2 & 1 \\ -1 & \omega+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega^4-1 & \omega^2+\omega+1 \\ -\omega^2-\omega-1 & -1+(\omega+1)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega-1 & 0 \\ 0 & \omega^2+2\omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 A^2 의 모든 성분의 합은

$$\begin{aligned} &(\omega-1)+0+0+(\omega^2+2\omega) \\ &= \omega^2+3\omega-1 \\ &= (-\omega-1)+3\omega-1 \quad (\because \omega^2=-\omega-1) \\ &= 2\omega-2 \end{aligned}$$

답 ⑤

$$\begin{aligned} 09 \quad (x \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} &= (x+k \quad kx+4) \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= (x^2+kx+kx+4) \\ &= (x^2+2kx+4) \end{aligned}$$

모든 실수 x 에 대하여 $x^2+2kx+4 \geq 0$ 이므로 이차방정식 $x^2+2kx+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 1 \times 4 \leq 0$$

$$k^2 - 4 \leq 0, (k+2)(k-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq k \leq 2$$

답 ③

$$\begin{aligned} 10 \quad A^2 &= AA = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^4 &= A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^5 &= A^4A = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

행렬 A^5 의 모든 성분의 합이 92이므로

$$1+5a+0+1=92, 5a=90$$

$$\therefore a=18$$

답 ⑤

11 $A^2+3A-2E=O$ 에서 $A^2=-3A+2E$

$$\text{또, } B = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A+E \text{이므로}$$

$$B^2 = (A+E)^2 = A^2 + 2A + E$$

$$= (-3A+2E) + 2A + E$$

$$= -A + 3E$$

$$\therefore A^2B^2 = (-3A+2E)(-A+3E)$$

$$= 3A^2 - 11A + 6E$$

$$= 3(-3A+2E) - 11A + 6E$$

$$= -20A + 12E$$

답 ①

$$12 \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

따라서 $A^3=A^6=A^9=\dots=E$ 이므로

$$\begin{aligned}
& A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{20} \\
&= (A + A^2 + E) + (A + A^2 + E) + \cdots + (A + A^2 + E) \\
&\quad + A + A^2 \\
&= 6(A + A^2 + E) + A + A^2 \\
&= 7A^2 + 7A + 6E \\
&= 7 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E
\end{aligned}$$

답 ③

13 조건 (가)에서 $A^2 = A - 2E$ 이므로 조건 (나)에서

$$\begin{aligned}
A \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} &= A \left\{ A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = A^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (A - 2E) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2E \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

따라서 $a = -2$, $b = -5$ 이므로
 $a + b = -2 + (-5) = -7$

답 ②

14 ㄱ. 일반적으로 행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않는다.

즉, $AB \neq BA$ 이므로

$$\begin{aligned}
(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\
&= A^2 + AB + BA + B^2 \\
&\neq A^2 + 2AB + B^2 \text{ (거짓)}
\end{aligned}$$

ㄴ. $B = A - 6E$ 이므로

$$\begin{aligned}
AB &= A(A - 6E) = A^2 - 6A \\
BA &= (A - 6E)A = A^2 - 6A \\
\therefore AB &= BA \text{ (참)}
\end{aligned}$$

ㄷ. $(E - A)^2 = E - 2A + A^2$

$$\begin{aligned}
&= E - 2A + E \\
&= 2(E - A) \\
(E - A)^3 &= (E - A)^2(E - A) \\
&= \{2(E - A)\}(E - A) \\
&= 2(E - A)^2 = 2\{2(E - A)\} \\
&= 4(E - A) \text{ (참)}
\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

참고 두 행렬 A, B 에 대하여 $pA + qB = kE$ (p, q, k 는 0이 아닌 실수)이면 $AB = BA$ 이다.

답 ④

15 $P^2 = E$, $PAP = B$ 이므로

ㄱ. $PAP = B$ 의 양변의 왼쪽에 P 를 곱하면

$$\begin{aligned}
P^2AP &= PB, \quad EAP = PB \\
\therefore AP &= PB \text{ (참)}
\end{aligned}$$

ㄴ. $AP = PA$ 의 양변의 오른쪽에 P 를 곱하면

$$\begin{aligned}
AP^2 &= PAP \\
AE &= B \quad \therefore A = B \text{ (참)}
\end{aligned}$$

ㄷ. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ 이면

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$$PAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = B$$

이지만

$$BP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$PB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

이므로

$$BP \neq PB \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

16 $C = pA + qB$ 에서

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -10 & -9 \\ a & 4 \end{pmatrix} &= p \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -p-4q & 3p-q \\ p & p+2q \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-10 = -p - 4q, \quad -9 = 3p - q, \quad a = p, \quad 4 = p + 2q$$

$$\therefore a = -2, \quad p = -2, \quad q = 3$$

$$\therefore a + p + q = -2 + (-2) + 3 = -1$$

답 ①

17 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a = 7 - b, \quad b = \frac{11}{a}$$

$$a + b = 7, \quad ab = 11$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$= 7^3 - 3 \times 11 \times 7 = 112$$

답 ④

18 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ 이고

$$a_{11} = 2 \times 1 + (-1)^1 = 1, \quad a_{12} = 2 \times 1 + (-1)^2 = 3,$$

$$a_{21} = 2 \times 2 + (-1)^2 = 5, \quad a_{22} = 2 \times 2 + (-1)^4 = 5$$

이므로

$$b_{11} = -a_{11} = -1, \quad b_{12} = -a_{21} = -5,$$

$$b_{21} = -a_{12} = -3, \quad b_{22} = -a_{22} = -5$$

..... ②

$$\therefore B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ③$$

답 $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

채점기준	배점
① a_{ij} 구하기	3
② b_{ij} 구하기	2
③ 행렬 B 구하기	1

19 $A^2 + pA + qE = O$ 에서

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q-4 & -2p-2 \\ 2p+2 & p+q-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$q-4=0, -2p-2=0, 2p+2=0, p+q-3=0$$

$$\therefore p=-1, q=4 \quad \dots\dots ①$$

따라서 $A^2 - A + 4E = O$, 즉 $A^2 = A - 4E$ 이므로

$$A^3 = A^2 A = (A - 4E)A$$

$$= A^2 - 4A = (A - 4E) - 4A$$

$$= -3A - 4E$$

$$\therefore m = -3, n = -4 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore pq + mn = -1 \times 4 + (-3) \times (-4) = 8 \quad \dots\dots ③$$

답 8

채점기준	배점
① p, q 의 값 구하기	3
② m, n 의 값 구하기	3
③ $pq + mn$ 의 값 구하기	1

수능형 기출문제 & 변형문제

p.124~128

1 $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & a \\ b & ab+4 \end{pmatrix}$

이때 $A^2 = A$ 이므로

$$\begin{pmatrix} 1+ab & a \\ b & ab+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a \\ b & 2 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$1+ab = -1, ab+4 = 2 \quad \therefore ab = -2$$

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 10 + 2 \times (-2) = 6 \quad \text{답 ①}$$

2 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & -2a \\ -2b & ab+9 \end{pmatrix}$

$$-2A = -2 \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2a \\ -2b & 6 \end{pmatrix}$$

이때 $A^2 = -2A$ 이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$1+ab = -2, ab+9 = 6 \quad \therefore ab = -3$$

$$\begin{aligned} \therefore a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &= 4^3 - 3 \times (-3) \times 4 = 100 \end{aligned} \quad \text{답 ④}$$

3 $AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ㄱ. $a = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$ 은 두 제품의 상반기 제조원가 총액,

$b = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$ 는 두 제품의 하반기 제조원가 총액이므로

$a+b$ 는 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 제조원가 총액이다. (거짓)

ㄴ. $c = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$ 은 두 제품의 상반기 판매 총액,

$d = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$ 는 두 제품의 하반기 판매 총액이므로

$c+d$ 는 지난해 1년 동안에 판매된 제품의 판매 총액이다.

(참)

ㄷ. d 는 두 제품의 하반기 판매 총액, b 는 두 제품의 하반기 제조

원가 총액이므로 $d-b$ 는 지난해 하반기에 판매된 제품의 판매 이익금 총액이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

4 $PQ = \begin{pmatrix} 20 & 35 \\ 20 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2 & 1.1 \\ 1.2 & 1.05 \end{pmatrix}$

이므로 행렬 PQ 의 (2, 2) 성분은 $20 \times 1.1 + 15 \times 1.05$

20×1.1 은 '을' 공장의 올해 하반기 A 모델 자동차 생산량,

15×1.05 는 '을' 공장의 올해 하반기 B 모델 자동차 생산량이다.

따라서 행렬 PQ 의 (2, 2) 성분은 '을' 공장의 올해 하반기 A, B 모델 자동차 생산량을 나타낸다.

답 ②

5 조건 ㉑에서

$$E^2 - 2B + B^2 = E - B, E - 2B + B^2 = E - B$$

$$\therefore B^2 = B$$

$$\therefore B^3 = B^2 B = BB = B^2 = B$$

또, 조건 ㉒, ㉓에서

$$BA^3 = (BA)A^2 = (AB)A^2 = -BA^2$$

$$= -(BA)A = -(AB)A = BA$$

$$= AB = -B$$

$$\therefore B^3 + 2BA^3 = B + 2 \times (-B) = -B$$

답 ⑤

6 $A^2 = -A$ 이므로

$$A^4 = (A^2)^2 = (-A)^2 = A^2 = -A$$

또, $BA = -B$ 이므로

$$\begin{aligned}
 BA^3 &= (BA)A^2 = -B \times (-A) \\
 &= BA = -B \\
 \therefore 3A^4 + 2BA^3 &= 3 \times (-A) + 2 \times (-B) \\
 &= -3A - 2B
 \end{aligned}$$

답 ③

7 $A^2 + A^3 = -3A - 3E$ 이므로

$$\begin{aligned}
 A^4 + A^5 &= A^2(A^2 + A^3) = A^2(-3A - 3E) \\
 &= -3A^3 - 3A^2 = -3(A^3 + A^2) \\
 &= -3(-3A - 3E) = 9A + 9E
 \end{aligned}$$

이때 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 하면 $a+b+c+d=0$ 이므로

행렬 $A^4 + A^5$ 의 모든 성분의 합은

$$9(a+b+c+d) + 9(1+0+0+1) = 9 \times 0 + 9 \times 2 = 18 \quad \text{답 18}$$

8 $A^4 + A^5 = A^2(A^2 + A^3) = A^2(4A + 4E)$

$$\begin{aligned}
 &= 4A^3 + 4A^2 = 4(A^3 + A^2) \\
 &= 4(4A + 4E) = 16A + 16E
 \end{aligned}$$

이때 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 라 하면 $a+b+c+d=-4$ 이므로

행렬 $A^4 + A^5$ 의 모든 성분의 합은

$$16(a+b+c+d) + 16(1+0+0+1) = 16 \times (-4) + 16 \times 2 = -32 \quad \text{답 -32}$$

9 $a_{ij} + a_{ji} = 0$ 에서 $a_{ij} = -a_{ji}$ 이므로

$$a_{11} = 0, a_{12} = -a_{21}, a_{22} = 0$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$b_{ij} - b_{ji} = 0$ 에서 $b_{ij} = b_{ji}$ 이므로 $b_{12} = b_{21}$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

이때 $2A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ 에서

$$2 \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -b_{11} & 2a_{12} - b_{12} \\ -2a_{12} - b_{12} & -b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-b_{11} = 1, 2a_{12} - b_{12} = 2, -2a_{12} - b_{12} = -2, -b_{22} = 4$$

즉, $b_{11} = -1, b_{22} = -4$ 이고, $2a_{12} - b_{12} = 2, -2a_{12} - b_{12} = -2$ 를 연립하여 풀면

$$a_{12} = 1, b_{12} = 0$$

즉, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 A^2 - B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

따라서 행렬 $A^2 - B$ 의 (2, 2) 성분은 3이다.

답 3

10 $a_{ij} = \begin{cases} 0 & (i=j) \\ -1-a_{ji} & (i \neq j) \end{cases}$ 에서

$$a_{11} = 0, a_{12} = -1 - a_{21}, a_{21} = -1 - a_{12}, a_{22} = 0$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -1-a_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

$b_{ij} = b_{ji}$ 에서 $b_{12} = b_{21}$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

이때 $A + 2B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ 에서

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -1-a_{12} & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2b_{11} & a_{12} + 2b_{12} \\ -1-a_{12} + 2b_{12} & 2b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2b_{11} = -2, a_{12} + 2b_{12} = 4, -1-a_{12} + 2b_{12} = 7, 2b_{22} = 4$$

즉, $b_{11} = -1, b_{22} = 2$ 이고, $a_{12} + 2b_{12} = 4, -1-a_{12} + 2b_{12} = 7$ 을 연립하여 풀면

$$a_{12} = -2, b_{12} = 3$$

따라서 $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 이므로

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

답 ①

실전 모의고사 5회분

실전 모의고사 1회

p.130~133

01 $\frac{{}_{200}C_{198} \times {}_{198}P_{198}}{{}_{199}!} = \frac{{}_{200}C_2 \times 198!}{{}_{199}!} = \frac{200 \times 199}{2 \times 1} = 100$ [답] ②

02 $a_{11}=2, a_{12}=1, a_{21}=2, a_{22}=1$ 이므로

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ [답] ②

03 $2x-4 \leq 4x < x+9$ 에서 $\begin{cases} 2x-4 \leq 4x \\ 4x < x+9 \end{cases}$

$2x-4 \leq 4x$ 에서 $-2x \leq 4$

$\therefore x \geq -2$ ㉠

$4x < x+9$ 에서 $3x < 9$

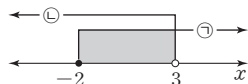
$\therefore x < 3$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2 \leq x < 3$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2$

의 5개이다.



[답] ③

04 $2x-7 \geq 0$ 에서 $2x \geq 7$

$\therefore x \geq \frac{7}{2}$ ㉠

$x^2-5x-14 < 0$ 에서 $(x+2)(x-7) < 0$

$\therefore -2 < x < 7$ ㉡

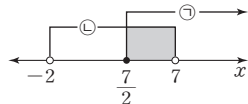
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{7}{2} \leq x < 7$

따라서 정수 x 는 4, 5, 6이므로 모든

정수 x 의 값의 합은

$4+5+6=15$



[답] ⑤

05 같은 학년 학생끼리는 어느 두 명도 이웃하지 않는 경우의 수는 1학년 학생과 2학년 학생이 교대로 서는 경우의 수와 같다.

맨 앞에 1학년 학생이 설 때 1학년 학생과 2학년 학생이 교대로 서는 경우의 수는 $3! \times 3! = 36$

맨 앞에 2학년 학생이 설 때 1학년 학생과 2학년 학생이 교대로 서는 경우의 수는 $3! \times 3! = 36$

따라서 구하는 경우의 수는

$36+36=72$

[답] ⑤

참고 1학년 학생과 2학년 학생이 교대로 서는 경우는 다음과 같이 2가지이다.

$(1)(2)(1)(2)(1)(2), (2)(1)(2)(1)(2)(1)$

따라서 구하는 경우의 수는 $3! \times 3! \times 2 = 72$

06 6명의 학생을 1명, 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = 6 \times 10 \times 1 = 60$

이 세 그룹이 3개의 정류장에서 내리는 경우의 수는

$3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$60 \times 6 = 360$

[답] ②

07 $1\square\square\square\square$ 꼴의 자연수의 개수는

$4! = 24$

$2\square\square\square\square$ 꼴의 자연수의 개수는

$4! = 24$

$30\square\square\square$ 꼴의 자연수의 개수는

$3! = 6$

$31\square\square\square$ 꼴의 자연수의 개수는

$3! = 6$

10234부터 31420까지의 자연수의 개수는

$24+24+6+6=60$

31420보다 큰 수는 차례대로

$32014, 32041, 32104, \dots$

이므로 63번째로 큰 수는 32104이다.

[답] ④

08 15개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_{15}C_3 = 455$

(i) 한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3 = 10$

이고, 이와 같은 직선이 3개이므로

$10 \times 3 = 30$

(ii) 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_3 = 1$

이고, 이와 같은 직선이 13개이므로

$1 \times 13 = 13$

(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는

$455 - (30 + 13) = 412$

[답] ③

09 부등식 $|x| + |x-6| \geq 8$ 에서

(i) $x < 0$ 일 때

$-x - (x-6) \geq 8, -2x+6 \geq 8, -2x \geq 2$

$\therefore x \leq -1$

(ii) $0 \leq x < 6$ 일 때

$x - (x-6) \geq 8, 6 \geq 8$

즉, $0 \leq x < 6$ 에서 부등식의 해는 존재하지 않는다.

(iii) $x \geq 6$ 일 때

$x + (x-6) \geq 8, 2x-6 \geq 8, 2x \geq 14$

$\therefore x \geq 7$

(i), (ii), (iii)에서 부등식 $|x| + |x-6| \geq 8$ 의 해는
 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 7$
 이것을 해로 갖고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+1)(x-7) \geq 0 \quad \therefore x^2 - 6x - 7 \geq 0$

답 ④

10 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{aligned} 2x &= 8 & \dots\dots \textcircled{㉠} \\ 5 &= z^2 - xz & \dots\dots \textcircled{㉡} \\ 0 &= y + 2 & \dots\dots \textcircled{㉢} \\ 4z &= 2z^2 + 3y & \dots\dots \textcircled{㉣} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{㉠} \text{에서 } x &= 4, \textcircled{㉢} \text{에서 } y = -2 \\ x &= 4 \text{를 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } 5 = z^2 - 4z \\ z^2 - 4z - 5 &= 0, (z+1)(z-5) = 0 \\ \therefore z &= -1 \text{ 또는 } z = 5 & \dots\dots \textcircled{㉤} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -2 \text{를 } \textcircled{㉣} \text{에 대입하면 } 4z = 2z^2 - 6 \\ z^2 - 2z - 3 &= 0 \\ (z+1)(z-3) &= 0 \quad \therefore z = -1 \text{ 또는 } z = 3 & \dots\dots \textcircled{㉥} \\ \textcircled{㉤}, \textcircled{㉥} \text{에서 } z &= -1 \end{aligned}$$

$$\therefore x + y + z = 4 + (-2) + (-1) = 1 \quad \text{답 ①}$$

11 a, b, c 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$a + b - c = 6 \text{에서 } a + b = 6 + c \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

(i) $c = 1$ 일 때

$$\begin{aligned} \textcircled{㉠} \text{에서 } a + b &= 7 \text{이므로 순서쌍 } (a, b) \text{는} \\ (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) &\text{의 6개} \end{aligned}$$

(ii) $c = 2$ 일 때

$$\begin{aligned} \textcircled{㉠} \text{에서 } a + b &= 8 \text{이므로 순서쌍 } (a, b) \text{는} \\ (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) &\text{의 5개} \end{aligned}$$

(iii) $c = 3$ 일 때

$$\begin{aligned} \textcircled{㉠} \text{에서 } a + b &= 9 \text{이므로 순서쌍 } (a, b) \text{는} \\ (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) &\text{의 4개} \end{aligned}$$

(iv) $c = 4$ 일 때

$$\begin{aligned} \textcircled{㉠} \text{에서 } a + b &= 10 \text{이므로 순서쌍 } (a, b) \text{는} \\ (4, 6), (5, 5), (6, 4) &\text{의 3개} \end{aligned}$$

(v) $c = 5$ 일 때

$$\begin{aligned} \textcircled{㉠} \text{에서 } a + b &= 11 \text{이므로 순서쌍 } (a, b) \text{는} \\ (5, 6), (6, 5) &\text{의 2개} \end{aligned}$$

(vi) $c = 6$ 일 때

$$\begin{aligned} \textcircled{㉠} \text{에서 } a + b &= 12 \text{이므로 순서쌍 } (a, b) \text{는} \\ (6, 6) &\text{의 1개} \end{aligned}$$

$$(i) \sim (vi) \text{에서 구하는 순서쌍 } (a, b, c) \text{의 개수는} \\ 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21 \quad \text{답 ①}$$

12 ① ${}_nP_2 = n(n-1) = 56$

$$8 \times 7 = 56 \text{이므로 } n = 8$$

② ${}_nP_n = n! = 120$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{이므로 } n = 5$$

$$\textcircled{3} \quad {}_nC_{n-2} = {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!} = 55 \text{에서 } n(n-1) = 110$$

$$11 \times 10 = 110 \text{이므로 } n = 11$$

$$\textcircled{4} \quad 3! \times {}_7C_3 = 3! \times \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!} = {}_7P_3 \text{이므로}$$

$$n = 7$$

$$\textcircled{5} \quad {}_nC_4 = {}_nC_5 \text{이므로 } n = 4 + 5 = 9$$

따라서 자연수 n 의 값이 가장 큰 것은 ③이다.

답 ③

$$13 \quad a' = \frac{1}{3}a + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}a + b\right) = \frac{7}{15}a + \frac{1}{5}b$$

$$b' = \frac{4}{5}\left(\frac{2}{3}a + b\right) = \frac{8}{15}a + \frac{4}{5}b$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{1}{5} \\ \frac{8}{15} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

따라서 $p = 7, q = 3, r = 8, s = 12$ 이므로

$$p - q - r - s = 7 - 3 - 8 - 12 = -16$$

답 ⑤

14 ㄱ. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = b^2 - 4ac > 0 \quad (\text{참})$$

ㄴ. 직선 $y = px + q$ 의 y 절편이 양수이므로 $q > 0$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{라 하면 } x > 0 \text{일 때 } f(x) > 0 \text{이므로}$$

$$f(q) > 0, \text{ 즉 } aq^2 + bq + c > 0 \text{이다. (참)}$$

ㄷ. $ax^2 + (b-p)x + c - q \leq 0$ 에서

$$ax^2 + bx + c \leq px + q \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

부등식 ㉠의 해는 직선 $y = px + q$ 가 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프보다 위쪽에 있거나 만나는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$a \leq x \leq \beta \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

15 ㄱ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 이면 $A^2 = O$ 이지만 $A \neq O$ 이다. (거짓)

$$\text{ㄴ. } A = EA = A^4 A = A^5 = E \text{이므로}$$

$$A^2 = E^2 = E \quad (\text{참})$$

ㄷ. $A^2 - AB - BA + B^2 = O$ 에서

$$A(A-B) - B(A-B) = O$$

$$(A-B)^2 = O$$

$$\therefore (A-B)^3 = (A-B)^2(A-B) = O \quad (\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

16 6개의 영역을 6가지 색으로 칠하는 경우의 수는

$$6! = 720$$

이때 두 영역이 이웃하는 경우는

$$\textcircled{㉠}\textcircled{㉡}, \textcircled{㉡}\textcircled{㉢}, \textcircled{㉢}\textcircled{㉣}, \textcircled{㉣}\textcircled{㉤}, \textcircled{㉤}\textcircled{㉥}, \textcircled{㉥}\textcircled{㉦}$$

의 6가지이므로

이웃하는 6가지 영역 중 하나를 택하여 특정한 두 가지의 색을 칠하는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times 2! = 12$$

나머지 4가지 색을 남은 4개의 영역에 칠하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 특정한 두 가지의 색이 이웃하게 칠하는 경우의 수는

$$12 \times 24 = 288$$

이므로 특정한 두 가지의 색이 이웃하지 않도록 칠하는 경우의 수는

$$720 - 288 = 432$$

답 ⑤

17 카드 지갑 한 개의 가격이 $(5+x)$ 만 원일 때의 판매량은

$(30-3x)$ 개이므로 카드 지갑의 한 달 총판매액은

$$(5+x)(30-3x) \text{ (만 원)} \quad \dots\dots ①$$

한 달 총판매액이 162만 원 이상이 되려면

$$(5+x)(30-3x) \geq 162, -3x^2 + 15x + 150 \geq 162$$

$$3x^2 - 15x + 12 \leq 0, x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

$$(x-1)(x-4) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq x \leq 4 \quad \dots\dots ②$$

이때 판매량 $30-3x$ 가 최소이려면 $x=4$

따라서 카드 지갑 한 개의 가격은

$$5+4=9 \text{ (만 원)} \quad \dots\dots ③$$

$$\therefore A=9 \quad \dots\dots ④$$

답 9

채점기준	배점
① 카드 지갑의 한 달 총판매액 구하기	1
② 카드 지갑의 한 달 총판매액이 162만 원 이상이 되도록 하는 x 의 값의 범위 구하기	2
③ 카드 지갑 한 개의 가격 구하기	2
④ A 의 값 구하기	1

18 (i) 갑이 주스를 주문하는 경우

을이 주문할 수 있는 음료는 콜라 1가지

(ii) 갑이 커피를 주문하는 경우

을이 주문할 수 있는 음료는 콜라, 주스의 2가지

(iii) 갑이 녹차를 주문하는 경우

을이 주문할 수 있는 음료는 콜라, 주스의 2가지

(iv) 갑이 밀크티를 주문하는 경우

을이 주문할 수 있는 음료는 콜라, 주스, 커피, 녹차의 4가지

..... ①

병, 정이 (i)~(iv)의 각 경우에 대하여 갑, 을이 주문한 음료를 뺀 3가지 중 서로 다른 2가지를 택하여 주문하는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6 \quad \dots\dots ②$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$(1+2+2+4) \times 6 = 54 \quad \dots\dots ③$$

답 54

채점기준	배점
① 갑이 주문하는 음료를 기준으로 하여 을이 주문할 수 있는 음료의 가짓수 구하기	2
② 갑, 을이 주문한 후 병, 정이 음료를 주문하는 경우의 수 구하기	2
③ 경우의 수 구하기	2

19 (i) 5명 중 어린이가 2명인 경우

어른 4명, 어린이 3명 중에서 어른 3명, 어린이 2명을 뽑는

$$\text{경우의 수는 } {}_4C_3 \times {}_3C_2 = 4 \times 3 = 12$$

어른 3명을 일렬로 앉히는 경우의 수는 $3! = 6$

어른 3명의 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리 중 2개를 택하여

$$\text{어린이 2명을 앉히는 경우의 수는 } {}_4P_2 = 12$$

따라서 어린이끼리 이웃하지 않도록 앉히는 경우의 수는

$$12 \times 6 \times 12 = 864 \quad \dots\dots ①$$

(ii) 5명 중 어린이가 3명인 경우

어른 4명, 어린이 3명 중에서 어른 2명, 어린이 3명을 뽑는

$$\text{경우의 수는 } {}_4C_2 \times {}_3C_3 = 6 \times 1 = 6$$

어른 2명을 일렬로 앉히는 경우의 수는 $2! = 2$

어른 2명의 사이사이 및 양 끝의 3개의 자리에 어린이 3명을

$$\text{앉히는 경우의 수는 } 3! = 6$$

따라서 어린이끼리 이웃하지 않도록 앉히는 경우의 수는

$$6 \times 2 \times 6 = 72 \quad \dots\dots ②$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$864 + 72 = 936 \quad \dots\dots ③$$

답 936

채점기준	배점
① 어린이가 2명일 때의 경우의 수 구하기	3
② 어린이가 3명일 때의 경우의 수 구하기	3
③ 경우의 수 구하기	1

20 $A^2 - A - 2E = O$ 에서 $A^2 = A + 2E$ 이고

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 2-a & -b \\ -c & 2-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2E - A \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} B^2 &= (2E - A)^2 = 4E - 4A + A^2 \\ &= 4E - 4A + (A + 2E) = -3A + 6E \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore B^3 &= B^2 B = (-3A + 6E)(2E - A) \\ &= -6A + 3A^2 + 12E - 6A \\ &= -12A + 3(A + 2E) + 12E \\ &= -9A + 18E \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

따라서 $-9A + 18E = xA + yE$ 이므로

$$(x+9)A = (18-y)E$$

A 는 E 의 실수배가 아니므로

$$x+9=0, 18-y=0$$

$$\therefore x=-9, y=18$$

$$\therefore x+y=-9+18=9 \quad \dots\dots ④$$

답 9

채점기준	배점
① B 를 A, E 에 대한 일차식으로 나타내기	1
② B^2 을 A, E 에 대한 일차식으로 나타내기	2
③ B^3 을 A, E 에 대한 일차식으로 나타내기	3
④ x, y 의 값과 $x+y$ 의 값 구하기	1

01 $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ 에서

$$(x-1)(x-5) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq x \leq 5$$

따라서 $\alpha=1, \beta=5$ 이므로

$$\beta - \alpha = 5 - 1 = 4$$

답 ④

02 $2^k \times 9^2 = 2^k \times (3^2)^2 = 2^k \times 3^4$ 의 양의 약수의 개수가 30이므로

$$(k+1) \times (4+1) = 30$$

$$k+1=6 \quad \therefore k=5$$

답 ③

03 $AB=O$ 에서

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+2 & 6a+4 \\ 6+2b & 12+4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$3a+2=0, 6a+4=0, 6+2b=0, 12+4b=0$$

$$\therefore a = -\frac{2}{3}, b = -3$$

$$\therefore ab = -\frac{2}{3} \times (-3) = 2$$

답 ①

04 서로 다른 n 권의 책 중에서 3권을 택하여 책꽂이에 일렬로 꽂는 경우의 수가 120이므로

$${}_nP_3 = 120$$

$$n(n-1)(n-2) = 120 = 6 \times 5 \times 4$$

$$\therefore n=6$$

답 ②

05 여학생을 n 명이라 하면

남학생 10명, 여학생 n 명 중에서 남학생 2명, 여학생 2명을 뽑는 경우의 수가 450이므로

$${}_{10}C_2 \times {}_nC_2 = 450, 45 \times \frac{n(n-1)}{2!} = 450, n(n-1) = 20$$

$$n^2 - n - 20 = 0, (n+4)(n-5) = 0$$

$$\therefore n=5 \quad (\because n \text{은 } 2 \text{ 이상의 자연수})$$

답 ①

06 이차부등식 $f(x) < 0$ 의 해가 $x < -1$ 또는 $x > 3$ 이므로

$$f(x) = a(x+1)(x-3) \quad (a < 0) \text{이라 하면}$$

$$f(2x-3) = a(2x-3+1)(2x-3-3)$$

$$= 4a(x-1)(x-3)$$

따라서 부등식 $f(2x-3) > 0$ 에서

$$4a(x-1)(x-3) > 0, (x-1)(x-3) < 0 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore 1 < x < 3$$

답 ②

07 어른과 어린이가 반드시 같은 줄에 앉으므로 어른 2명은 앞줄과 뒷줄에 각각 1명씩 앉아야 한다.

어른 2명이 앉을 앞줄의 의자 1개, 뒷줄의 의자 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_3C_1 = 2 \times 3 = 6$$

이 2개의 의자에 어른 2명이 앉는 경우의 수는

$$2! = 2$$

어린이 3명이 남은 3개의 의자에 앉는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 2 \times 6 = 72$$

답 ④

$$08 \quad A^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -4 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -4 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & -4\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -4 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ \frac{1}{4} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ \frac{1}{4} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -4 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

$$\therefore A^8 = (A^4)^2 = (-E)^2 = E^2 = E$$

따라서 $A^n = E$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

답 ⑤

09 $P(x) = 2x^3 + (k+3)x^2 + 6x + 5 - k$ 라 하면

$$P(-1) = -2 + (k+3) - 6 + 5 - k = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & k+3 & 6 & 5-k \\ & & -2 & -k-1 & k-5 \\ \hline & 2 & k+1 & -k+5 & 0 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x+1)\{2x^2 + (k+1)x - k+5\}$$

$$P(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } 2x^2 + (k+1)x - k+5 = 0$$

즉, 삼차방정식 $P(x) = 0$ 이 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 이차방정식 $2x^2 + (k+1)x - k+5 = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (k+1)^2 - 4 \times 2 \times (-k+5) < 0$$

$$k^2 + 2k + 1 + 8k - 40 < 0, k^2 + 10k - 39 < 0$$

$$(k+13)(k-3) < 0$$

$$\therefore -13 < k < 3$$

답 ②

10 학생 수를 x 라 하면 초콜릿은 $(3x+12)$ 개이므로

$$5(x-1) + 1 \leq 3x + 12 < 5(x-1) + 5$$

$$\text{즉, } \begin{cases} 5(x-1) + 1 \leq 3x + 12 \\ 3x + 12 < 5(x-1) + 5 \end{cases} \text{이므로}$$

$$5(x-1)+1 \leq 3x+12 \text{에서}$$

$$5x-4 \leq 3x+12, 2x \leq 16 \quad \therefore x \leq 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$3x+12 < 5(x-1)+5 \text{에서}$$

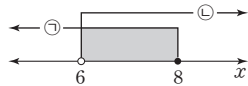
$$3x+12 < 5x, -2x < -12 \quad \therefore x > 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$6 < x \leq 8$$

따라서 자연수 x 는 7, 8이므로 학생

은 최소 7명이다.



답 ③

- 11 ㄱ. $AB=O$ 이므로 $A+B=E$ 의 양변의 왼쪽에 A 를 곱하면

$$A(A+B)=A, A^2+AB=A, A^2+O=A$$

$$\therefore A^2=A \text{ (참)}$$

- ㄴ. $A+B=E$ 에서 $B=E-A$ 이므로

$$AB=A(E-A)=A-A^2$$

$$BA=(E-A)A=A-A^2$$

$$\therefore AB=BA \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

이때 $AB=O$ 이므로 $BA=O$ (참)

- ㄷ. ㉑에서 $AB=BA$ 이므로

$$A^2+B^2=(A+B)^2-2AB=E^2-O=E \text{ (참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

- 12 $A^2+2A+4E=O$ 의 양변에 $A-2E$ 를 곱하면

$$(A-2E)(A^2+2A+4E)=O$$

$$A^3-8E=O \quad \therefore A^3=8E$$

$$\therefore A^{15}=(A^3)^5=(8E)^5=8^5E=\begin{pmatrix} 8^5 & 0 \\ 0 & 8^5 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A^{15} 의 $(1, 1)$ 성분은 8^5 이다.

답 ⑤

- 13 (i) 지불하는 경우의 수

100원짜리 동전으로 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

500원짜리 동전으로 지불하는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

1000원짜리 지폐로 지불하는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불하는 경우의 수는

$$4 \times 5 \times 3 - 1 = 59$$

- (ii) 지불할 수 있는 금액의 수

500원짜리 동전 2개로 지불하는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불하는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 2장을 모두 500원짜리 동전 4개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 100원짜리 동전 3개, 500원짜리 동전 8개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원의 4가지

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, ..., 4000원의 9가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$$4 \times 9 - 1 = 35$$

(i), (ii)에서 $a=59, b=35$ 이므로

$$a-b=59-35=24$$

답 ①

- 14 5개의 영역을 4가지 색으로 칠해야 하므로 4가지 색 중 두 번 사용할 색을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

두 영역이 이웃하지 않는 경우는 AC, AD, BD, BE, CE의 5가지이므로 두 번 사용하기로 정한 색을 이웃하지 않는 영역에 칠하는 경우의 수는

$${}_5C_1=5$$

나머지 3가지 색을 남은 3개의 구역에 칠하는 경우의 수는

$$3!=6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 5 \times 6 = 120$$

답 ①

- 15 7개의 공을 1개씩 상자에서 꺼내는 경우의 수는 7개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

검은 공 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

조건 ㉑에서 흰 공끼리는 이웃하지 않으므로 검은 공 4개의 사이 사이 및 양 끝의 5개의 자리 중 3개를 택하여 크기가 다른 흰 공 3개를 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_3=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 60 = 1440$$

답 ⑤

- 16 조건 ㉑에서 $f(4)=f(-2)$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=\frac{4+(-2)}{2}=1$ 에 대하여 대칭이고, $f(x)$ 의 x^2 의 계수가 1이므로

$$f(x)=(x-1)^2+k \text{ (} k \text{는 상수)}$$

또, $g(x)$ 의 x^2 의 계수가 -1 이므로 $g(x)=-x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면 조건 ㉒에서

$$g(-1)=-1-a+b=3 \quad \therefore b=a+4$$

$$\therefore g(x)=-x^2+ax+a+4$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x)-g(x) &= \{(x-1)^2+k\} - (-x^2+ax+a+4) \\ &= 2x^2-(a+2)x+k-a-3 \end{aligned}$$

이때 조건 ㉓에서 이차부등식 $f(x)>g(x)$, 즉

$$f(x)-g(x)>0 \text{의 해가 } x<-1 \text{ 또는 } x>5 \text{이므로 해가}$$

$x<-1$ 또는 $x>5$ 이고 x^2 의 계수가 2인 이차부등식을 구하면

$$2(x+1)(x-5)>0 \quad \therefore 2x^2-8x-10>0$$

이것이 부등식 $f(x)-g(x)>0$ 과 일치하므로

$$-(a+2)=-8, k-a-3=-10$$

$$\therefore a=6, k=-1$$

따라서

$$f(x)=(x-1)^2-1=x^2-2x, g(x)=-x^2+6x+10$$

$$\therefore f(1)=1-2=-1, g(1)=-1+6+10=15$$

$$\therefore f(1)g(1)=-1 \times 15 = -15$$

답 ②

17 (i) 300보다 큰 세 자리 자연수의 개수

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 4의 2개

백의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중 서로 다른 2개를

택하여 십의 자리, 일의 자리에 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

이므로

$$2 \times 12 = 24 \quad \dots\dots ①$$

(ii) 3000보다 작은 네 자리 자연수의 개수

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2의 2개

천의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중 서로 다른 3개를

택하여 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 나열하는 경우의

수는 ${}_4P_3=24$ 이므로

$$2 \times 24 = 48 \quad \dots\dots ②$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$24 + 48 = 72 \quad \dots\dots ③$$

답 72

채점기준	배점
① 300보다 큰 세 자리 자연수의 개수 구하기	2
② 3000보다 작은 네 자리 자연수의 개수 구하기	3
③ 300보다 크고 3000보다 작은 자연수의 개수 구하기	1

18 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ 에서

$$(A-B)(A-B)=A^2-2AB+B^2$$

$$A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2$$

$$-AB-BA=-2AB$$

$$\therefore AB=BA \quad \dots\dots ①$$

$$\text{즉, } \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ b & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ b & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} a+1+b & -3a-5 \\ a-b & -3a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a+1 & 4 \\ ab+b-2a & b+2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ②$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a+1+b=-2a+1, -3a-5=4, a-b=ab+b-2a,$$

$$-3a+2=b+2$$

$$\therefore a=-3, b=9$$

$$\therefore a+b=-3+9=6 \quad \dots\dots ③$$

답 6

채점기준	배점
① $AB=BA$ 임을 설명하기	2
② AB, BA 를 계산하여 $AB=BA$ 를 행렬로 나타내기	2
③ 두 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 a, b 의 값과 $a+b$ 의 값 구하기	2

19 5개의 문자 p, l, a, c, e 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$5!=120$$

양 끝에 모음 a, e 를 나열하는 경우의 수는 $2!$ 이고, 남은 3개의

문자 p, l, c 를 a 와 e 사이에 나열하는 경우의 수는 $3!$ 이므로 양

끝에 모두 모음이 오도록 나열하는 경우의 수는

$$2! \times 3! = 12$$

따라서 적어도 한쪽 끝에 자음이 오도록 나열하는 경우의 수는

$$120 - 12 = 108 \quad \therefore m=108 \quad \dots\dots ①$$

한편, 3개의 자음 p, l, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$3!=6$$

3개의 자음 사이사이에 모음 a, e 를 나열하는 경우의 수는

$$2!=2$$

따라서 자음과 모음을 번갈아 나열하는 경우의 수는

$$6 \times 2 = 12 \quad \therefore n=12 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore m-n=108-12=96 \quad \dots\dots ③$$

답 96

채점기준	배점
① m 의 값 구하기	3
② n 의 값 구하기	3
③ $m-n$ 의 값 구하기	1

20 맨 앞줄에 남자 1명, 여자 1명이 짝을 이루어 서는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_4C_1 \times 2! = 48$$

맨 뒷줄에 남자 1명, 여자 1명이 짝을 이루어 서는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_3C_1 \times 2! = 30$$

나머지 6명이 서는 경우의 수는 $6!$

따라서 맨 앞줄과 맨 뒷줄에 남녀 한 명씩 짝을 이루어 달리는 경우의 수는

$$48 \times 30 \times 6! \quad \dots\dots ①$$

$$= (2^4 \times 3) \times (2 \times 3 \times 5) \times \{2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3)\}$$

$$= 2^9 \times 3^4 \times 5^2 \quad \dots\dots ②$$

$$\therefore a=9, b=4, c=2$$

$$\therefore a-b-c=9-4-2=3 \quad \dots\dots ③$$

답 3

채점기준	배점
① 경우의 수 구하기	4
② ①을 소인수분해하여 나타내기	2
③ a, b, c 의 값과 $a-b-c$ 의 값 구하기	1

실전 모의고사 3회

p.138~141

$$01 \quad A-B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-b & a+5 & -1 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & c \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$1-b=-1, a+5=1, -2=c$$

$$\therefore a=-4, b=2, c=-2$$

$$\therefore a+b+c=-4+2+(-2)=-4 \quad \text{답 } ①$$

02 (i) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 로 가는 경우의 수는

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

(ii) $A \rightarrow C \rightarrow D$ 로 가는 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12 + 4 = 16 \quad \text{답 } ①$$

- 03 남학생 2명을 1명으로 생각하여 4명의 순서를 정하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

남학생 2명이 순서를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

답 ②

- 04 $|x+2| \leq \frac{1}{2}k - 10$ 에서 $|x+2| \geq 0$ 이므로 $\frac{1}{2}k - 10 < 0$ 일 때 부등식의 해가 존재하지 않는다. 즉,

$$\frac{1}{2}k < 10 \quad \therefore k < 20$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, ..., 19의 19개이다.

답 ④

- 05 다항식 $(x+y)(a+b+c)(p+q+r)$ 의 전개식에서 서로 다른 모든 항의 개수는

$$2 \times 3 \times 3 = 18 \quad \therefore m = 18$$

x 를 포함한 항의 개수는 $(a+b+c)(p+q+r)$ 의 전개식에서 모든 항의 개수와 같으므로

$$3 \times 3 = 9 \quad \therefore n = 9$$

$$\therefore m + n = 18 + 9 = 27$$

답 ④

- 06 ${}_nP_r = 360$ 에서 $\frac{n!}{(n-r)!} = 360$ ㉠

$${}_nC_r = 15$$
에서 $\frac{n!}{r!(n-r)!} = 15$ ㉡

㉠ ÷ ㉡을 하면

$$\frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{n!}{r!(n-r)!}} = \frac{360}{15}, r! = 24$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{이므로 } r = 4$$

따라서 ${}_nP_4 = 360$ 이므로

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \quad \therefore n = 6$$

$$\therefore n + r = 6 + 4 = 10$$

답 ④

- 07 구하는 경우의 수는 D팀을 제외한 5개의 팀을 3개의 팀, 2개의 팀의 2개의 조로 나누고 3개의 팀을 다시 2개의 팀, 1개의 팀으로 나누는 경우의 수와 같으므로

$$({}_5C_3 \times {}_2C_2) \times ({}_3C_2 \times {}_1C_1) = 10 \times 1 \times 3 \times 1 = 30$$

답 ②

- 08 $X - 2Y = A$ ㉠

$$2X + Y = B \quad \dots\dots ㉡$$

㉠ + ㉡ × 2를 하면

$$5X = A + 2B, 5X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5X = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

㉢에서

$$Y = B - 2X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{따라서 } X + Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$a = 0, b = -2, c = 3, d = 4$$

$$\therefore a + b + c + d = 0 + (-2) + 3 + 4 = 5$$

답 ⑤

- 09 부부끼리는 앉은 좌석의 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 부부 세 쌍의 자리를 정하는 경우는 다음과 같이 3가지이다.

11	12	13	11	12	13	11	12	13
21	22	23	21	22	23	21	22	23

각 경우에 대하여 부부 세 쌍의 자리를 정하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

$$\text{부부끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 } 2! \times 2! \times 2! = 8$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 6 \times 8 = 144$$

답 ④

- 10 수학과 체육을 제외한 6과목 중에서 오늘 공부할 2과목을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

수학과 체육은 체육, 수학의 순서로 공부하기로 정해져 있다. 즉, 수학, 체육의 공부 순서를 정하는 경우의 수는 4개의 자리에서 2개의 자리를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_2 = 6$$

수학과 체육을 제외한 나머지 2과목의 공부 순서를 정하는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 6 \times 2 = 180$$

답 ②

- 11 구하는 순서쌍의 개수는 모든 경우의 수에서 $|a-b| \leq 1$ 을 만족시키는 순서쌍의 개수를 뺀 것과 같다.

주사위를 두 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

$|a-b| = 0$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

의 6개

$|a-b| = 1$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6),$$

$$(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$$

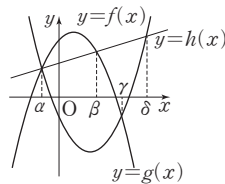
의 10개

따라서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$36 - (6 + 10) = 20$$

답 ③

- 12 오른쪽 그림과 같이 주어진 그래프들의 교점의 x 좌표를 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 하자.



$$\{f(x)\}^2 - \{g(x)+h(x)\}f(x) + g(x)h(x) = 0 \text{에서}$$

$$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)-h(x)\} = 0$$

$$\therefore f(x)=g(x) \text{ 또는 } f(x)=h(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

방정식 $f(x)=g(x)$ 의 근은 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표이므로 $x=\alpha$ 또는 $x=\gamma$

방정식 $f(x)=h(x)$ 의 근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=h(x)$ 의 교점의 x 좌표이므로 $x=\beta$ 또는 $x=\delta$

따라서 ①의 서로 다른 실근은 $x=\alpha$ 또는 $x=\gamma$ 또는 $x=\delta$ 이므로 그 개수는 3이다. 답 ④

- 13 이차방정식 $x^2-x+1=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=1$$

$$\text{따라서 } \alpha+\beta-1=0, \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=1 \text{이므로}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

이때

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = X$$

$$X^3 = X^2 X = X X = X^2 = X$$

$\vdots$

이므로

$$X = X^2 = X^3 = \cdots = X^{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X + X^2 + X^3 + \cdots + X^{10} = \underbrace{X + X + X + \cdots + X}_{10\text{개}}$$

$$= 10X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{답 ⑤}$$

- 14 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ 이므로

$$A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 26 \end{pmatrix}$$

$$aA + bE = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a \\ -a & -2a+b \end{pmatrix}$$

이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a+b=5, -a=7, -2a+b=26$$

$$\therefore a=-7, b=12$$

$$\therefore b-a=12-(-7)=19 \quad \text{답 ④}$$

- 15 $x^2-4x-5>0$ 에서 $(x+1)(x-5)>0$

$$\therefore x<-1 \text{ 또는 } x>5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

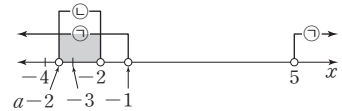
$$x^2+(4-a)x-2a+4<0 \text{에서}$$

$$(x+2)(x-a+2)<0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(i) a-2<-2, \text{ 즉 } a<0 \text{일 때}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } a-2<x<-2$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 1개이므로 다음 그림에서



$$-4 \leq a-2 < -3 \quad \therefore -2 \leq a < -1$$

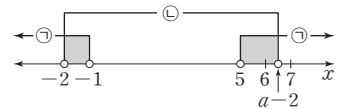
$$(ii) a-2=-2, \text{ 즉 } a=0 \text{일 때}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } (x+2)^2 < 0 \text{이므로 해는 없다.}$$

$$(iii) a-2>-2, \text{ 즉 } a>0 \text{일 때}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } -2 < x < a-2$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 1개이므로 다음 그림에서



$$6 < a-2 \leq 7 \quad \therefore 8 < a \leq 9$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } -2 \leq a < -1 \text{ 또는 } 8 < a \leq 9$$

$$\text{따라서 } p=-2, q=-1, r=8, s=9 \text{이므로}$$

$$p+q+r+s=-2+(-1)+8+9=14 \quad \text{답 ①}$$

- 16 조건 ㉞에서 $\frac{1-x}{4}=t$ 로 놓으면

$$1-x=4t \quad \therefore x=1-4t$$

$$\text{부등식 } f(t) \leq 0, \text{ 즉 } f\left(\frac{1-x}{4}\right) \leq 0 \text{의 해가 } -7 \leq x \leq 9 \text{이므로}$$

$$-7 \leq 1-4t \leq 9, -8 \leq -4t \leq 8 \quad \therefore -2 \leq t \leq 2$$

$$\text{즉, 부등식 } f(x) \leq 0 \text{의 해가 } -2 \leq x \leq 2 \text{이므로}$$

$$f(x)=a(x+2)(x-2) \quad (a>0)$$

$$\text{라 하면 } f(x) \geq 8x-20 \text{에서}$$

$$a(x+2)(x-2) \geq 8x-20$$

$$\therefore ax^2-8x-4a+20 \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

조건 ㉞에서 모든 실수 x 에 대하여 부등식 ①이 성립하므로 이차 방정식 $ax^2-8x-4a+20=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-4)^2 - a(-4a+20) \leq 0$$

$$16+4a^2-20a \leq 0, a^2-5a+4 \leq 0$$

$$(a-1)(a-4) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq a \leq 4$$

$$\text{이때 } f(3)=a \times 5 \times 1=5a \text{이므로}$$

$$5 \leq 5a \leq 20 \quad \therefore 5 \leq f(3) \leq 20$$

$$\text{따라서 } M=20, m=5 \text{이므로}$$

$$M-m=20-5=15 \quad \text{답 ⑤}$$

- 17 $2x-3<5x+3$ 에서

$$-3x<6 \quad \therefore x>-2$$

$$\cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$5x+3 \leq 4x+a \text{에서}$$

$$x \leq a-3$$

..... ②

주어진 연립부등식의 해가 $b < x \leq 4$ 이므로

$$b = -2, a-3 = 4 \quad \therefore a = 7, b = -2$$

$$\therefore ab = 7 \times (-2) = -14$$

..... ③

답 -14

채점기준	배점
① 부등식 $2x-3 < 5x+3$ 의 해 구하기	2
② 부등식 $5x+3 \leq 4x+a$ 의 해 구하기	2
③ a, b의 값과 ab의 값 구하기	2

- 18 미술관은 반드시 방문하므로 유적지와 박물관 10곳 중에서 4곳의 장소를 방문하면 된다.

유적지와 박물관 10곳 중에서 4곳의 장소를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_4 = 210$$

..... ①

박물관을 방문하지 않는 경우의 수는 유적지 6곳 중에서 4곳의 장소를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_4 = 15$$

..... ②

박물관을 1곳만 방문하는 경우의 수는 유적지 6곳 중에서 3곳의 장소를 방문하고 박물관 4곳 중에서 1곳의 장소를 방문하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_3 \times {}_4C_1 = 20 \times 4 = 80$$

..... ③

따라서 구하는 경우의 수는

$$210 - (15 + 80) = 115$$

..... ④

답 115

채점기준	배점
① 전체 경우의 수 구하기	2
② 박물관을 방문하지 않는 경우의 수 구하기	2
③ 박물관을 1곳만 방문하는 경우의 수 구하기	1
④ 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기	2

- 19 액자의 넓이는 $(9+2x)(6+2x)$ (cm^2),

사진의 넓이는 $9 \times 6 = 54$ (cm^2)이므로 액자 틀의 넓이는

$$(9+2x)(6+2x) - 54 = 4x^2 + 30x \text{ (cm^2)}$$

액자 틀의 넓이가 54 cm^2 이상 100 cm^2 이하가 되어야 하므로

$$54 \leq 4x^2 + 30x \leq 100$$

..... ①

$$54 \leq 4x^2 + 30x \text{에서 } 4x^2 + 30x - 54 \geq 0$$

$$2x^2 + 15x - 27 \geq 0, (x+9)(2x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -9 \text{ 또는 } x \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{이때 } x > 0 \text{이므로 } x \geq \frac{3}{2}$$

..... ⑦

..... ②

$$\text{또, } 4x^2 + 30x \leq 100 \text{에서 } 4x^2 + 30x - 100 \leq 0$$

$$2x^2 + 15x - 50 \leq 0, (x+10)(2x-5) \leq 0$$

$$\therefore -10 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{이때 } x > 0 \text{이므로 } 0 < x \leq \frac{5}{2}$$

..... ①

..... ③

$$\text{⑦, ①의 공통부분을 구하면 } \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

따라서 x의 최댓값은 $\frac{5}{2}$, 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이므로 x의 최댓값과 최솟값의 차는

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$$

..... ④

답 1

채점기준	배점
① 액자 틀의 넓이를 이용하여 부등식 세우기	2
② 부등식 $54 \leq 4x^2 + 30x$ 를 만족시키는 x의 값의 범위 구하기	2
③ 부등식 $4x^2 + 30x \leq 100$ 를 만족시키는 x의 값의 범위 구하기	2
④ x의 최댓값과 최솟값의 차 구하기	1

- 20 조건 ㉞에서 $A^2 = 3A - 4E$

..... ①

이므로 조건 ㉝에서

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = A \left\{ A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = A^2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (3A - 4E) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 4E \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

..... ②

따라서 $a = 5, b = 14$ 이므로

$$ab = 5 \times 14 = 70$$

..... ③

답 70

채점기준	배점
① 조건 ㉞를 이용하여 A^2 을 A, E에 대한 일차식으로 나타내기	1
② 조건 ㉝를 이용하여 행렬 $A \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ 구하기	5
③ a, b의 값과 ab의 값 구하기	1

실전 모의고사 4회

p.142~145

- 01 $|x-2| < 3$ 에서 $-3 < x-2 < 3$

$$\therefore -1 < x < 5$$

따라서 정수 x는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

답 ③

- 02 두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 3인 경우는

(1, 2), (2, 1)의 2가지

(ii) 눈의 수의 합이 8인 경우는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$2 + 5 = 7$$

답 ②

03 ${}_{n+2}P_2 = {}_nC_{n-2} + 24$ 에서 ${}_{n+2}P_2 = {}_nC_2 + 24$

$$(n+2)(n+1) = \frac{n(n-1)}{2!} + 24$$

$$2(n+2)(n+1) = n(n-1) + 48$$

$$2n^2 + 6n + 4 = n^2 - n + 48$$

$$n^2 + 7n - 44 = 0, (n+11)(n-4) = 0$$

$$\therefore n = 4 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

답 ②

04 $aA + bB = a \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3b & b \\ 2b & -b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3b & 2a+b \\ a+2b & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 3 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

이므로 두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-3b = c, 2a + b = 3, a + 2b = 0, -b = d$$

$$\therefore a = 2, b = -1, c = 3, d = 1$$

$$\therefore a + b + c + d = 2 + (-1) + 3 + 1 = 5$$

답 ①

05 순서쌍 (x, y) 의 전체 개수는 $5 \times 5 = 25$

$2x + y \leq 7$ 을 만족시키는 순서쌍 (x, y) 의 개수를 먼저 구해 보면

(i) $x = 1$ 일 때, $y \leq 5$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$ 의 5개

(ii) $x = 2$ 일 때, $y \leq 3$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$(2, 1), (2, 2), (2, 3)$ 의 3개

(iii) $x = 3$ 일 때, $y \leq 1$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$(3, 1)$ 의 1개

(i), (ii), (iii)에서 $2x + y \leq 7$ 을 만족시키는 순서쌍 (x, y) 의 개수는 $5 + 3 + 1 = 9$

따라서 $2x + y > 7$ 을 만족시키는 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$25 - 9 = 16$$

답 ④

06 $A \begin{pmatrix} 2a-c \\ 2b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 에서 $A \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$2A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 2A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 의 모든 성분의 합은

$$2 + 3 + 1 + (-1) = 5$$

답 ④

07 1반에서 지불해야 할 금액을 a 원이라 하면

$$20 \times 300 + 18 \times 700 = a$$

2반에서 지불해야 할 금액을 b 원이라 하면

$$14 \times 300 + 16 \times 700 = b$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 20 & 18 \\ 14 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

따라서 두 반에서 각각 지불해야 할 금액을 계산하는 행렬의 곱은 AC 이다.

답 ②

08 10명 중에서 5명의 대표를 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_5 = 252$$

A, B 마을의 6명 중에서만 대표를 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

B, C 마을의 7명 중에서만 대표를 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

A, C 마을의 7명 중에서만 대표를 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$252 - 6 - 21 - 21 = 204$$

답 ④

09 7개의 문자 중 a, e 를 포함하여 5개의 문자를 택하는 경우의 수는 a, e 를 제외한 5개의 문자 중 3개의 문자를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

이 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

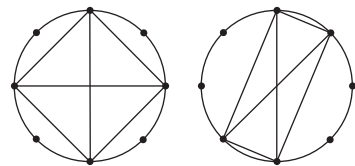
a 와 e 가 이웃하지 않아야 하므로 위의 3개의 문자 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리 중 2개를 택하여 a, e 를 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 6 \times 12 = 720$$

답 ③

10 사각형의 개수는 ${}_8C_4 = 70$



원의 지름은 4개이고, 원의 지름 2개가 직사각형의 대각선이 되도록 4개의 점을 연결하면 직사각형이 만들어지므로 직사각형의 개수는 ${}_4C_2 = 6$

따라서 직사각형이 아닌 것의 개수는

$$70 - 6 = 64$$

답 ④

11 $C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow D$ 의 순서대로 칠한다.

(i) A, E를 같은 색으로 칠하는 경우의 수

C에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 4가지

A에 칠할 수 있는 색은 C, B에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 A에 칠하는 색과 같으므로 1가지

D에 칠할 수 있는 색은 C, E에 칠한 색을 제외한 3가지이므로

$$5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3 = 180$$

(ii) A, E를 다른 색으로 칠하는 경우의 수

C에 칠할 수 있는 색은 5가지

B에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 4가지

A에 칠할 수 있는 색은 C, B에 칠한 색을 제외한 3가지

E에 칠할 수 있는 색은 C, B, A에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 C, E에 칠한 색을 제외한 3가지이므로

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3 = 360$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$180 + 360 = 540$$

답 ⑤

12 가이드를 두 차에 한 명씩 배치하는 경우의 수는 $2! = 2$

7인승 차에 남는 자리는 6개(3쌍), 9인승 차에 남는 자리는 8개(4쌍)이므로

(i) 7인승 차에 2쌍, 9인승 차에 4쌍의 부부를 배치하는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_4 = 15$$

(ii) 7인승 차에 3쌍, 9인승 차에 3쌍의 부부를 배치하는 경우의 수는

$$\left({}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} \right) \times 2! = 20$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$2 \times (15 + 20) = 70$$

답 ④

13 $f(x) = x^2 - 2kx - 5k + 14$ 라 할 때, 이차 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 크려면

(i) $f(x) = 0$ 이 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 1 \times (-5k + 14) \geq 0$$

$$k^2 + 5k - 14 \geq 0, (k+7)(k-2) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -7 \text{ 또는 } k \geq 2$$

(ii) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축, 즉 직선 $x = -\frac{-2k}{2 \times 1} = k$

가 직선 $x = 1$ 보다 오른쪽에 있어야 하므로

$$k > 1$$

(iii) $f(1) > 0$ 이어야 하므로

$$f(1) = 1 - 2k - 5k + 14 > 0$$

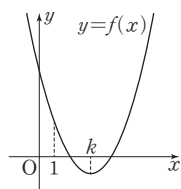
$$-7k + 15 > 0, 7k < 15$$

$$\therefore k < \frac{15}{7}$$

(i), (ii), (iii)에서 공통부분을 구하면

$$2 \leq k < \frac{15}{7}$$

답 ④



14 (i) A가 양 끝자리 중 한 곳에 서는 경우의 수

A가 양 끝자리 중 한 곳을 골라 서는 경우 $\boxed{A} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{}$

의 수는 2

B, C가 A의 옆자리 한 곳을 제외한 나머지 4개의 자리 중 2

개를 택하여 일렬로 서는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$

나머지 3명이 남은 자리 3곳에 일렬로 서는 경우의 수는

$$3! = 6 \text{ 이므로}$$

$$2 \times 12 \times 6 = 144$$

(ii) A가 양 끝이 아닌 자리에 서는 경우의 수

A가 가운데 네 자리 중 한 곳을 골라 서는 $\boxed{} \boxed{} \boxed{A} \boxed{} \boxed{}$

경우의 수는 4

B, C가 A의 옆자리 2곳을 제외한 나머지 3개의 자리 중 2개

를 택하여 일렬로 서는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

나머지 3명이 남은 자리 3곳에 일렬로 서는 경우의 수는

$$3! = 6 \text{ 이므로}$$

$$4 \times 6 \times 6 = 144$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$144 + 144 = 288$$

답 ②

15 $A(A+E) = -E$ 에서 $A^2 + AE = -E$

$$\therefore A^2 + A = -E \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

양변의 오른쪽에 B 를 곱하면

$$A^2B + AB = -B$$

$$A(AB) + AB = -B, A(2E) + 2E = -B (\because AB = 2E)$$

$$2A + 2E = -B$$

$$\therefore B = -2A - 2E$$

따라서

$$B^2 = (-2A - 2E)^2 = 4A^2 + 8A + 4E$$

$$= 4(-A - E) + 8A + 4E (\because \textcircled{7} \text{에서 } A^2 = -A - E)$$

$$= 4A$$

이므로 $k = 4$

답 ⑤

16 $|3x+1| + x \leq 5$ 에서

(i) $x < -\frac{1}{3}$ 일 때

$$-(3x+1) + x \leq 5, -2x-1 \leq 5$$

$$-2x \leq 6 \quad \therefore x \geq -3$$

$$\text{그런데 } x < -\frac{1}{3} \text{ 이므로 } -3 \leq x < -\frac{1}{3}$$

(ii) $x \geq -\frac{1}{3}$ 일 때

$$(3x+1) + x \leq 5, 4x+1 \leq 5, 4x \leq 4$$

$$\therefore x \leq 1$$

$$\text{그런데 } x \geq -\frac{1}{3} \text{ 이므로 } -\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

(i), (ii)에서 부등식 $|3x+1| + x \leq 5$ 의 해는

$$-3 \leq x \leq 1$$

한편, $x^2 + 2kx - 2k - 1 < 0$ 에서

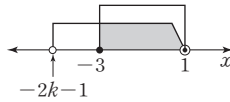
$$(x + 2k + 1)(x - 1) < 0$$

이때 연립부등식의 해가 $-3 \leq x < 1$

이므로 오른쪽 그림에서

$$-2k - 1 < -3$$

$$-2k < -2 \quad \therefore k > 1$$



답 ②

- 17 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + (k-2)x - k^2 + 4 > 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 + (k-2)x - k^2 + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (k-2)^2 - 4 \times 1 \times (-k^2 + 4) < 0 \quad \dots\dots ①$$

$$k^2 - 4k + 4 + 4k^2 - 16 < 0, \quad 5k^2 - 4k - 12 < 0$$

$$(5k+6)(k-2) < 0 \quad \therefore -\frac{6}{5} < k < 2 \quad \dots\dots ②$$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다. ③

답 3

채점기준	배점
① 이차방정식의 판별식을 이용하여 k 에 대한 이차부등식 세우기	2
② 이차부등식 풀기	3
③ 정수 k 의 개수 구하기	1

- 18 A를 포함한 n 명의 양궁 선수 중에서 A를 포함하여 경기에 출전할 4명의 선수를 뽑는 경우의 수는 ${}_{n-1}C_3$ ①

즉, ${}_{n-1}C_3 = 20$ 이므로

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

$$(n-1)(n-2)(n-3) = 120 = 6 \times 5 \times 4$$

$$\therefore n = 7 \quad \dots\dots ②$$

따라서 A를 포함한 7명의 양궁 선수 중에서 경기에 출전할 4명의 선수를 뽑을 때, A를 제외하고 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15 \quad \dots\dots ③$$

답 15

채점기준	배점
① A를 포함하여 경기에 출전할 4명의 선수를 뽑는 경우의 수를 조합으로 나타내기	2
② n 의 값 구하기	2
③ A를 제외하고 뽑는 경우의 수 구하기	2

19 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^{399} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -399 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{400} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -400 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ①$$

$$\therefore B = A - A^2 + A^3 - \dots + A^{399} - A^{400}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \dots + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -399 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -400 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-1+1-\dots+1-1 & 0 \\ -1+2-3+\dots-399+400 & 1-1+1-\dots+1-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 200 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ②$$

따라서 행렬 B 의 모든 성분의 합은

$$0 + 0 + 200 + 0 = 200 \quad \dots\dots ③$$

답 200

참고 $-1 + 2 - 3 + \dots - 399 + 400$

$$= (-1+2) + (-3+4) + \dots + (-399+400)$$

$$= 1 \times 200 = 200$$

채점기준	배점
① 행렬 A 의 거듭제곱을 반복하여 규칙 찾기	3
② 행렬 B 를 계산하여 간단히 하기	3
③ 행렬 B 의 모든 성분의 합 구하기	1

20 $x^4 - 2(k+2)x^2 + (2k+1)(k+2) = 0$ 에서 $x^2 = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2(k+2)t + (2k+1)(k+2) = 0 \quad \dots\dots ① \quad \dots\dots ①$$

주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

(i) t 에 대한 이차방정식 ①이 양의 실근과 음의 실근을 하나씩 갖는 경우

두 근의 곱이 음수이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 곱}) = (2k+1)(k+2) < 0$$

$$\therefore -2 < k < -\frac{1}{2} \quad \dots\dots ②$$

(ii) t 에 대한 이차방정식 ①이 양의 실근을 중근으로 갖는 경우

①의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(k+2)\}^2 - 1 \times (2k+1)(k+2) = 0$$

$$k^2 + 4k + 4 - (2k^2 + 5k + 2) = 0, \quad -k^2 - k + 2 = 0$$

$$k^2 + k - 2 = 0, \quad (k+2)(k-1) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 1$$

$$k = -2 \text{ 일 때, } t^2 = 0 \quad \therefore t = 0$$

$$k = 1 \text{ 일 때, } t^2 - 6t + 9 = 0, \quad (t-3)^2 = 0 \quad \therefore t = 3$$

$$\text{①이 양의 실근을 중근으로 가져야 하므로 } k = 1 \quad \dots\dots ③$$

$$(i), (ii) \text{에서 } -2 < k < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } k = 1 \quad \dots\dots ④$$

답 $-2 < k < -\frac{1}{2}$ 또는 $k = 1$

참고1 $x^2 = t$ 이므로 t 에 대한 이차방정식 ①의 두 근을 t_1, t_2 라 하면 주어진 사차방정식의 근은 $\sqrt{t_1}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}, -\sqrt{t_2}$ 이다.

이때 사차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건은 다음과 같다.

(i) $t_1 > 0, t_2 < 0$ (또는 $t_1 < 0, t_2 > 0$)

$$\text{사차방정식의 서로 다른 두 실근: } \sqrt{t_1}, -\sqrt{t_1}$$

서로 다른 두 허근: $\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_2}$

(ii) $t_1 = t_2 > 0$

사차방정식의 서로 다른 두 실근: $\sqrt{t_1} = \sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1} = -\sqrt{t_2}$

참고2 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 부호가 다른 두 실근을 가지려면

(i) 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 할 때,

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

(ii) (두 근의 곱) $= \frac{c}{a} < 0$

을 모두 만족시켜야 한다. 그런데 $\frac{c}{a} < 0$ 이면 $ac < 0$ 이므로

$D = b^2 - 4ac > 0$ 임이 보장된다. 즉, (ii)만 구하면 된다.

채점기준	배점
① $x^2 = t$ 로 놓고 주어진 사차방정식을 t 에 대한 이차방정식으로 나타내기	1
② ①의 이차방정식이 양의 실근과 음의 실근을 하나씩 가질 때 k 의 값의 범위 구하기	3
③ ①의 이차방정식이 양의 실근을 중근으로 가질 때 k 의 값 구하기	3
④ k 의 값 또는 범위 구하기	1

실전 모의고사 5회

p.146~149

01 $2 \times 2 \times 4 = 16$

답 ③

02 $|2x - 5| < x + 2$ 에서

(i) $x < \frac{5}{2}$ 일 때

$$-(2x - 5) < x + 2, -2x + 5 < x + 2$$

$$-3x < -3 \quad \therefore x > 1$$

$$\text{그런데 } x < \frac{5}{2} \text{이므로 } 1 < x < \frac{5}{2}$$

(ii) $x \geq \frac{5}{2}$ 일 때

$$2x - 5 < x + 2 \quad \therefore x < 7$$

$$\text{그런데 } x \geq \frac{5}{2} \text{이므로 } \frac{5}{2} \leq x < 7$$

(i), (ii)에서 $1 < x < 7$

답 ⑤

03 $A: 2 \times 2$ 행렬, $B: 1 \times 2$ 행렬, $C: 2 \times 3$ 행렬, $D: 2 \times 1$ 행렬
두 행렬의 곱셈은 앞 행렬의 열의 개수와 뒤 행렬의 행의 개수가
같을 때에만 정의되므로 행렬의 곱셈이 정의되는 것은 $A^2, BA,$
 BC 의 3개이다.

답 ③

참고 A^2 은 행렬 A 가 정사각행렬일 때에만 정의된다.

$$04 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$a_{11} = 1 \times 1 = 1, a_{12} = 1 + 2 - 2 = 1,$$

$$a_{21} = 2 + 1 + 2 = 5, a_{22} = 2 \times 2 = 4,$$

$$a_{31} = 3 + 1 + 2 = 6, a_{32} = 3 + 2 + 2 = 7$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A 의 모든 성분의 합은

$$1 + 1 + 5 + 4 + 6 + 7 = 24$$

답 ⑤

05 A 지역 팀 남자 4명과 B 지역 팀 여자 6명이 악수하는 경우의 수는

$$4 \times 6 = 24$$

A 지역 팀 여자 4명과 B 지역 팀 남자 6명이 악수하는 경우의 수는

$$4 \times 6 = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 + 24 = 48$$

답 ⑤

06 1개, 2개, 3개를 진열할 줄을 결정하는 경우의 수는 $3! = 6$

각 줄에 1개, 2개, 3개의 화분을 놓을 자리를 결정하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3C_2 \times {}_3C_3 = 3 \times 3 \times 1 = 9$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 9 = 54$$

답 ②

07 $x + 2y + 4z = 14$ 에서

(i) $z = 0$ 일 때, $x + 2y = 14$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$$(14, 0), (12, 1), (10, 2), (8, 3), (6, 4), (4, 5),$$

$$(2, 6), (0, 7) \text{의 8개}$$

(ii) $z = 1$ 일 때, $x + 2y = 10$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$$(10, 0), (8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4), (0, 5) \text{의 6개}$$

(iii) $z = 2$ 일 때, $x + 2y = 6$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$$(6, 0), (4, 1), (2, 2), (0, 3) \text{의 4개}$$

(iv) $z = 3$ 일 때, $x + 2y = 2$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$$(2, 0), (0, 1) \text{의 2개}$$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$8 + 6 + 4 + 2 = 20$$

답 ②

08 운전석에 아버지 또는 어머니가 앉는 경우의 수는 2

혜영이와 민수가 앞줄을 제외한 나머지 5개의 자리 중 2개를 택하여 앉는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$

나머지 2명이 남은 4개의 자리 중 2개를 택하여 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 20 \times 12 = 480$$

답 ⑤

09 $\neg. A = AE = O$ (참)

$$\neg. A^5 = A^2 A^3 = A^3 = A^2 A = A = E$$

$$\therefore A = E \text{ (참)}$$

$\neg. A^2 + B^2 = AB + BA$ 에서

$$A^2 + B^2 - AB - BA = O \quad \therefore (A - B)^2 = O$$

$$\text{이때 } A-B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{이면 } (A-B)^2=O \text{이지만}$$

$$A-B \neq O \text{ (거짓)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

10 $|x-a| < 6$ 에서 $-6 < x-a < 6$

$$\therefore a-6 < x < a+6$$

이때 주어진 연립부등식의 해가

$$-4 < x \leq -3 \text{ 또는 } 6 \leq x < 8 \text{ 이}$$

므로 오른쪽 그림에서 부등식

$$|x-a| < 6 \text{의 해는 } -4 < x < 8 \text{이다. 즉,}$$

$$a-6 = -4, a+6 = 8 \quad \therefore a = 2$$

$$\text{또, 이차부등식 } x^2+bx+c \geq 0 \text{의 해가 } x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 6 \text{이므로}$$

$$(x+3)(x-6) \geq 0 \quad \therefore x^2-3x-18 \geq 0$$

$$\therefore b = -3, c = -18$$

$$\therefore a+b+c = 2+(-3)+(-18) = -19$$

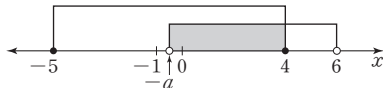
답 ②

11 $x^2+x-20 \leq 0$ 에서 $(x+5)(x-4) \leq 0$

$$\therefore -5 \leq x \leq 4$$

$$x^2+(a-6)x-6a < 0 \text{에서 } (x+a)(x-6) < 0$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 5개이므로 다음 그림에서



$$-1 \leq -a < 0 \quad \therefore 0 < a \leq 1$$

답 ④

12 자연수가 3의 배수이려면 각 자리 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

(i) 각 자리 숫자의 합이 6인 경우

0, 1, 2, 3으로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$$4! - 3! = 18$$

(ii) 각 자리 숫자의 합이 9인 경우

0, 1, 3, 5로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$$4! - 3! = 18$$

0, 2, 3, 4로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$$4! - 3! = 18$$

(iii) 각 자리 숫자의 합이 12인 경우

0, 3, 4, 5로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$$4! - 3! = 18$$

1, 2, 4, 5로 만들 수 있는 네 자리 자연수의 개수는

$$4! = 24$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$$18 \times 4 + 24 = 96$$

답 ⑤

13 소수가 아닌 수는 8, 9이므로 8, 9가 적힌 공을 양 끝에 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$

8, 9가 적힌 공 사이에 5개의 공을 나열하는 경우의 수는

$$5! = 120$$

8이 적힌 공 옆에 2가 적힌 공이 오는 경우의 수는 $4! = 24$

9가 적힌 공 옆에 3이 적힌 공이 오는 경우의 수는 $4! = 24$

8이 적힌 공 옆에 2가 적힌 공이 오고, 9가 적힌 공 옆에 3이 적힌 공이 오는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2! \times \{120 - (24 + 24 - 6)\} = 156$$

답 ③

14 $A^2+4A-5E=O$ 이므로

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+2b & ab-b \\ 2a-2 & 2b+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4a & 4b \\ 8 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+2b+4a-5 & ab+3b \\ 2a+6 & 2b-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

두 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2+2b+4a-5=0, ab+3b=0, 2a+6=0, 2b-8=0$$

$$\therefore a = -3, b = 4$$

이때 $A^2 = -4A + 5E$ 이므로

$$A^3 = A^2A = (-4A + 5E)A = -4A^2 + 5A$$

$$= -4(-4A + 5E) + 5A = 21A - 20E$$

$$\therefore A^3 + 5A^2 + A - 4E$$

$$= (21A - 20E) + 5(-4A + 5E) + A - 4E$$

$$= 2A + E$$

$$= 2 \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A^3 + 5A^2 + A - 4E$ 의 모든 성분의 합은

$$-5 + 8 + 4 + (-1) = 6$$

답 ②

15 이차함수 $y = x^2 + (a-1)x + 11$ 의 그래프가 직선 $y = 2x + a$ 보다 항상 위쪽에 있으므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$x^2 + (a-1)x + 11 > 2x + a, \text{ 즉 } x^2 + (a-3)x + 11 - a > 0 \text{이}$$

항상 성립한다. 따라서 이차방정식 $x^2 + (a-3)x + 11 - a = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (a-3)^2 - 4 \times 1 \times (11-a) < 0$$

$$a^2 - 6a + 9 - 44 + 4a < 0, a^2 - 2a - 35 < 0$$

$$(a+5)(a-7) < 0 \quad \therefore -5 < a < 7 \quad \cdots \cdots ㉑$$

또, 이차함수 $y = -x^2 + 4x + 2$ 의 그래프가 직선 $y = 2x + a$ 보다 항상 아래쪽에 있으므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$-x^2 + 4x + 2 < 2x + a, \text{ 즉 } x^2 - 2x + a - 2 > 0 \text{이 항상 성립한다.}$$

따라서 이차방정식 $x^2 - 2x + a - 2 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-1)^2 - 1 \times (a-2) < 0$$

$$1 - a + 2 < 0 \quad \therefore a > 3 \quad \cdots \cdots ㉒$$

㉑, ㉒의 공통부분을 구하면 $3 < a < 7$

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은

$$4 + 5 + 6 = 15$$

답 ⑤

- 16 빨간색 공 4개를 넣을 바구니 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

나머지 2개의 바구니에는 파란색 공을 1개씩 넣는다.

남은 5개의 파란색 공을 6개의 바구니에 넣는 경우의 수는 다음과 같다.

- (i) 1개씩 5개의 바구니에 넣는 경우의 수는 ${}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$

- (ii) 2개, 1개, 1개, 1개씩 4개의 바구니에 넣는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_5C_3 = 6 \times 10 = 60$$

- (iii) 2개, 2개, 1개씩 3개의 바구니에 넣는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_1 = 15 \times 4 = 60$$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$15 \times (6 + 60 + 60) = 1890$$

답 ⑤

- 17 $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$ 에서

$$A^2 + B^2 = (A+B)^2 - (AB+BA) \quad \dots\dots ①$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ②$$

답 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

채점기준	배점
① $A^2 + B^2 = (A+B)^2 - (AB+BA)$ 임을 설명하기	2
② 행렬 $A^2 + B^2$ 구하기	4

- 18 비밀번호의 전체 개수에서 양 끝 두 숫자의 합이 나머지 네 숫자의 합보다 크거나 같은 경우를 빼면 된다.

$$\text{비밀번호의 전체 개수} = 6! = 720 \quad \dots\dots ①$$

- (i) 양 끝에 3, 5가 오는 비밀번호의 개수

$$\text{양 끝 2개의 자리에 3, 5를 나열하는 경우의 수는 } 2! = 2$$

$$\text{나머지 네 숫자를 나열하는 경우의 수는 } 4! = 24 \text{이므로}$$

$$2 \times 24 = 48 \quad \dots\dots ②$$

- (ii) 양 끝에 4, 5가 오는 비밀번호의 개수

$$(i) \text{과 같은 방법으로 } 48 \quad \dots\dots ③$$

- (i), (ii)에서 구하는 비밀번호의 개수는

$$720 - (48 + 48) = 624 \quad \dots\dots ④$$

답 624

채점기준	배점
① 비밀번호의 전체 개수 구하기	2
② 양 끝에 3, 5가 오는 비밀번호의 개수 구하기	2
③ 양 끝에 4, 5가 오는 비밀번호의 개수 구하기	2
④ 양 끝 두 숫자의 합이 나머지 네 숫자의 합보다 작은 비밀번호의 개수 구하기	1

참고 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15이므로 양 끝 두 숫자의 합이 나머지 네 숫자의 합보다 크거나 같으려면 양 끝 두 숫자의 합이 8 이상이어야 하므로 8 또는 9이어야 한다. 즉, 양 끝에 올 수 있는 숫자는 3, 5 또는 4, 5이다.

- 19 부등식 $(a-2)x^2 + 2ax - 1 > 0$ 에서

$$(i) a=2 \text{ 일 때, } 4x-1 > 0, 4x > 1 \quad \therefore x > \frac{1}{4}$$

즉, 부등식 $(a-2)x^2 + 2ax - 1 > 0$ 을 만족시키는 실수 x 가 존재하므로 조건을 만족시키지 않는다. $\dots\dots ①$

- (ii) $a \neq 2$ 일 때

부등식 $(a-2)x^2 + 2ax - 1 > 0$ 을 만족시키는 실수 x 가 존재하지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$(a-2)x^2 + 2ax - 1 \leq 0 \text{ 이 성립해야 하므로 } a-2 < 0 \text{ 이고,}$$

$$\text{이차방정식 } (a-2)x^2 + 2ax - 1 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 할 때,}$$

$$D \leq 0 \text{ 이어야 한다. 즉, } \dots\dots ②$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - (a-2) \times (-1) \leq 0, a^2 + a - 2 \leq 0$$

$$(a+2)(a-1) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq a \leq 1$$

$$\text{이때 } a < 2 \text{ 이므로 } -2 \leq a \leq 1 \quad \dots\dots ③$$

- (i), (ii)에서 $-2 \leq a \leq 1$

$$\text{따라서 정수 } a \text{ 는 } -2, -1, 0, 1 \text{ 의 4개이다. } \dots\dots ④$$

답 4

채점기준	배점
① $a=2$ 일 때 조건을 만족시키지 않음을 설명하기	2
② $a \neq 2$ 일 때 부등식 $(a-2)x^2 + 2ax - 1 > 0$ 을 만족시키지 않을 조건 설명하기	2
③ $a \neq 2$ 일 때 a 의 값의 범위 구하기	2
④ 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위를 구하고 정수 a 의 개수 구하기	1

- 20 (i) 7개의 과일을 1개, 1개, 5개의 3조로 나누고, 세 사람에게 분배하는 경우의 수는

$$({}_7C_1 \times {}_6C_1 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!}) \times 3! = 126 \quad \dots\dots ①$$

- (ii) 7개의 과일을 1개, 2개, 4개의 3조로 나누고, 세 사람에게 분배하는 경우의 수는

$$({}_7C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4) \times 3! = 630 \quad \dots\dots ②$$

- (iii) 7개의 과일을 1개, 3개, 3개의 3조로 나누고, 세 사람에게 분배하는 경우의 수는

$$({}_7C_1 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!}) \times 3! = 420 \quad \dots\dots ③$$

- (iv) 7개의 과일을 2개, 2개, 3개의 3조로 나누고, 세 사람에게 분배하는 경우의 수는

$$({}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!}) \times 3! = 630 \quad \dots\dots ④$$

- (i) ~ (iv)에서 구하는 경우의 수는

$$126 + 630 + 420 + 630 = 1806 \quad \dots\dots ⑤$$

답 1806

채점기준	배점
① 과일을 1개, 1개, 5개의 3조로 나누고, 세 사람에게 분배하는 경우의 수 구하기	2
② 과일을 1개, 2개, 4개의 3조로 나누고, 세 사람에게 분배하는 경우의 수 구하기	1
③ 과일을 1개, 3개, 3개의 3조로 나누고, 세 사람에게 분배하는 경우의 수 구하기	2
④ 과일을 2개, 2개, 3개의 3조로 나누고, 세 사람에게 분배하는 경우의 수 구하기	1
⑤ 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기	1